Questão 2: (2,5 pontos) Seja $f(x,y) = ye^{bx^2+x+\frac{a}{y}}$ onde a e b são números reais não nulos. Encontre os pontos críticos de f e classifique-os em função de a e b.

Pontos críticos: $\nabla f(x,y) = \vec{0}$

$$f_x = y(2bx+1)e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{-1}{2b}$$

$$f_y = e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} + y \cdot e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} \cdot \left(-\frac{a}{y^2}\right)$$

$$f_y = \left(1 - \frac{a}{y}\right)e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} = 0 \Leftrightarrow y = a.$$

Único ponto crítico: $\left(\frac{-1}{2b}, a\right)$.

$$f_{xx} = y \cdot 2b \cdot e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} + y(2bx+1)^2 e^{bx^2+x+\frac{a}{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{xx}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = 2abe^{\frac{1}{4b}-\frac{1}{2b}+1}}$$

$$f_{xy} = \left(1 - \frac{a}{y}\right)(2bx+1)e^{bx^2+x+\frac{a}{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{xy}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = 0}$$

$$f_{yy} = \frac{a}{y^2}e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} + \left(+1 - \frac{a}{y}\right) \cdot \left(-\frac{a}{y^2}\right)e^{bx^2+\cancel{x}+\frac{a}{y}}$$

$$f_{yy} = \frac{a^2}{y^3}e^{bx^2+x+\frac{a}{y}} \Rightarrow \boxed{f_{yy}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = \frac{1}{a}e^{1-\frac{1}{4b}}}$$

$$H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) = 2b\left(e^{1-\frac{1}{4b}}\right)^2$$

Temos
- $b < 0 \Rightarrow H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2b}, a\right)$ é pt de sela
- $b > 0$ e $a > 0 \Rightarrow H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) > 0$ e $f_{xx}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) > 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2b}, a\right)$ é pt de mínimo local
- $b > 0$ e $a < 0 \Rightarrow H\left(\frac{-1}{2b}, a\right) > 0$ e $f_{xx}\left(\frac{-1}{2b}, a\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2b}, a\right)$ é ponto de máximo local.