Questão 2: (2,5 pontos) Seja $f(x,y) = xe^{by^2+by+\frac{a}{x}}$ onde a e b são números reais não nulos. Encontre os pontos críticos de f e classifique-os em função de a e b.

Pontos críticos: $\nabla f(x,y) = \vec{0}$

$$f_x = e^{by^2+by+\frac{a}{x}} + x \cdot e^{by^2+by+\frac{a}{x}} \cdot \left(\frac{-a}{x^2}\right)$$

$$f_x = \left(1 - \frac{a}{x}\right) e^{by^2+by+\frac{a}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f_y = xe^{by^2+by+\frac{a}{x}} \cdot (2by+b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}.$$

Único ponto crítico: $\left(a, -\frac{1}{2}\right)$.

$$f_{xx} = \left(\frac{a}{x^2}\right) \cdot e^{by^2+by+\frac{a}{x}} + \left(1 - \frac{a}{x}\right) \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) e^{by^2+by+\frac{a}{x}}$$

$$f_{xx} = \frac{a^2}{x^3} e^{by^2+by+\frac{a}{x}} \qquad \boxed{f_{xx}\left(a, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a} e^{\frac{b}{4}+\frac{b}{2}+1}}$$

$$f_{xy} = \left(1 - \frac{a}{x}\right) \cdot (2by+b) e^{by^2+by+\frac{a}{x}} \qquad \boxed{f_{xy}\left(a, -\frac{1}{2}\right) = 0}$$

$$f_{yy} = 2bx e^{by^2+by+\frac{a}{x}} + x(2by+b)^2 e^{by^2+by+\frac{a}{x}} \qquad \boxed{f_{yy}\left(a, -\frac{1}{2}\right) = 2ab e^{\frac{3b}{4}+1}}$$

$$H\left(a, -\frac{1}{2}\right) = 2b\left(e^{\frac{3b}{4}+1}\right)^2$$

Temos:

$b < 0 \Rightarrow H\left(a, -\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \left(a, -\frac{1}{2}\right)$ é pt de sela.

$b > 0$ e $a > 0 \Rightarrow H\left(a, -\frac{1}{2}\right) > 0$ e $f_{xx}\left(a, -\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow \left(a, -\frac{1}{2}\right)$ é mín. local

$b > 0$ e $a < 0 \Rightarrow H\left(a, -\frac{1}{2}\right) > 0$ e $f_{xx}\left(a, -\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \left(a, \frac{1}{2}\right)$ é máx. local