A

Questão 1: (2,5 pontos) A reta r é normal ao cone de equação $(2x-1)^2 + y^2 = z^2$ num ponto P e é, também, normal ao elipsoide de equação $(x-3)^2 + y^2 + \frac{(z+3)^2}{2} = \frac{3}{2}$ no ponto $Q = (4, 0, -4)$.

(a) Determine uma equação da reta r.

(b) Determine as coordenadas do ponto P.

a) Seja $F(x,y,z) = (x-3)^2 + y^2 + \frac{(z+3)^2}{2} - \frac{3}{2}$

$\nabla F(x,y,z) = (2(x-3), 2y, (z+3)) \Rightarrow \nabla F(4,0,-4) = (2,0,-1)$

A reta r tem equação

$$(4,0,-4) + \lambda(2,0,-1), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Seja $G(x,y,z) = (2x-1)^2 + y^2 - z^2$.

$\nabla G(x,y,z) = (4(2x-1), 2y, -2z)$

O ponto P é da forma $(4+2\lambda, 0, -4-\lambda)$

e $\nabla G(P)$ é paralelo ao reta $(2,0,-1)$.

$$\nabla G(4+2\lambda, 0, -4-\lambda) = (4(7+4\lambda), 0, 8+2\lambda)$$
$$= (28+16\lambda, 0, 8+2\lambda)$$

$$\nabla G(P) \parallel (2,0,-1) \Leftrightarrow 28+16\lambda = -2(8+2\lambda)$$
$$\Leftrightarrow 44 = -20\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{-11}{5}}$$

O ponto P é

$$P = \left(-\frac{2}{5}, 0, -\frac{9}{5}\right)$$

B

Questão 1: (2,5 pontos) A reta r é normal ao cone de equação $x^2 + (2y-1)^2 = z^2$ num ponto P e é, também, normal ao elipsoide de equação $x^2 + (y-3)^2 + \frac{(z+3)^2}{2} = \frac{3}{2}$ no ponto $Q = (0, 4, -4)$.

(a) Determine uma equação da reta r.

(b) Determine as coordenadas do ponto P.

a) Seja $H(x,y,z) = x^2 + (y-3)^2 + \frac{(z+3)^2}{2} - \frac{3}{2}$.

$\nabla H(x,y,z) = (2x, 2(y-3), z+3) \Rightarrow \nabla H(0,4,-4) = (0,2,-1)$

A reta r tem equação:

$(0,4,-4) + \lambda(0,2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$

b) Seja $L(x,y,z) = x^2 + (2y-1)^2 - z^2$

$\nabla L(x,y,z) = (2x, 4(2y-1), -2z)$

O ponto P é da forma $(0, 4+2\lambda, -4-\lambda)$ (*)

e $\nabla L(P)$ é paralelo ao vetor $(0,2,-1)$

$\nabla L(0, 4+2\lambda, -4-\lambda) = (0, 4(7+4\lambda), 8+2\lambda)$

$= (0, 28+16\lambda, 8+2\lambda)$

$\nabla L(P) \parallel (0,2,-1) \Leftrightarrow 28+16\lambda = -2(8+2\lambda)$

$\Leftrightarrow 44 = -20\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{11}{5}$

Substituindo em (*) temos:

$P = (0, -2/5, -9/5)$