Questão 4: (2,5 pts) A curva de nível 1 da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é parametrizada por $\gamma(t) = (2t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$. A curva $\sigma(u) = (u^3, -u, u^6 - u^5 - 2u^4 + 1)$, $u \in \mathbb{R}$, tem sua imagem contida no gráfico de f.

(a) Determine o vetor tangente à curva σ no ponto $(8, -2, 1)$.

(b) Determine o vetor tangente à curva γ no ponto $(8, -2)$.

(c) Calcule $\nabla f(8, -2)$.

(a) $\sigma(2) = (8,-2,1)$; $\sigma'(u) = (3u^2, -1, 6u^5 - 5u^4 - 8u^3)$ e $\boxed{\sigma'(2) = (12,-1,48)}$: este é o vetor tangente à curva σ no ponto $\sigma(2)$

(b) $\gamma(-2) = (8,-2)$; $\gamma'(t) = (4t, 1)$ e $\gamma'(-2) = (-8, 1)$.
$\gamma'(-2)$ é o vetor tangente à curva γ no ponto $\gamma(-2)$

(c) Como f é diferenciável no ponto $(8,-2)$ temos:

- $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(8,-2), \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2), -1\right)$ é um vetor normal ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(8,-2,1)$.
  Logo, $\vec{n} \cdot \sigma'(2) = 0$ (já que $Im(\sigma) \subset Graf(f)$), ou seja,
  $$12 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(8,-2) - 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2) - 48 = 0 \quad (I)$$
- $\nabla f(8,-2)$ é perpendicular ao vetor $\gamma'(-2)$ (já que γ é curva de nível 1 de f e $\gamma(-2) = (8,-2)$). Portanto,
  $$0 = \nabla f(8,-2) \cdot \gamma'(-2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(8,-2) \cdot (-8) + \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2) = 0 \quad (II)$$

De (I) e (II) temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(8,-2) = 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2) = 96,$$

Ou seja, $\nabla f(8,-2) = (12, 96)$