Questão 4: (2,5 pts) A curva de nível 1 da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é parametrizada por $\gamma(t) = (t, 2t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. A curva $\sigma(u) = (-u, u^3, u^6 - u^5 - 2u^4 + 1)$, $u \in \mathbb{R}$, tem sua imagem contida no gráfico de f.

(a) Determine o vetor tangente à curva σ no ponto $(-2, 8, 1)$.

(b) Determine o vetor tangente à curva γ no ponto $(-2, 8)$.

(c) Calcule $\nabla f(-2, 8)$.

(a) $\sigma(2) = (-2, 8, 1)$; $\sigma'(u) = (-1, 3u^2, 6u^5 - 5u^4 - 8u^3)$ e
$\sigma'(2) = (-1, 12, 48)$ $\rightsquigarrow$ vetor tangente à curva σ no ponto $\sigma(2)$

(b) $\gamma(-2) = (-2, 8)$; $\gamma'(t) = (1, 4t)$ e $\gamma'(-2) = (1, -8)$
$\gamma'(-2)$ é o vetor tangente à curva γ no ponto $\gamma(-2)$.

(c) Como f é diferenciável no ponto $(-2, 8)$, temos:

- $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,8), -1\right)$ é um vetor normal ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-2, 8, 1)$.
  Logo, $\vec{n} \cdot \sigma'(2) = 0$ (já que $Im(\sigma) \subset Graf(f)$),
  ou seja, $-\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8) + 12\frac{\partial f}{\partial y}(-2,8) - 48 = 0$ (I)
- $\nabla f(-2,8)$ é normal ao vetor $\gamma'(-2)$ (já que γ é a curva de nível 1 de f e $\gamma(-2) = (-2,8)$).
  Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8) \cdot 1 - \frac{\partial f}{\partial y}(-2,8) \cdot 8 = 0$ (II)

De I e II, concluímos: $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,8) = 12$ e
$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8) = 96$

$\nabla f(-2,8) = (96, 12)$