**Questão 3:** Dada uma função $f(x,y)$ de classe $C^2$, defina $g(r,\theta) = r^2 f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

(a) Expresse $g_{rr}(r,\theta)$ em termos das derivadas parciais de $f$.

(b) Sabendo que $f(0,0) = 1$, determine $g_{rr}(0,\theta)$ para um valor arbitrário de $\theta$.

(a) Como $f$ é de classe $C^2$, $f$ é também de classe $C^1$. Além disso, as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$ também são de classe $C^1$. Logo, podemos aplicar a regra da cadeia às composições de $f$, $f_x$ e $f_y$ com a aplicação $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. E como $f_{xy}$ e $f_{yx}$ são contínuas, então $f_{xy} = f_{yx}$. Vamos usar todos estes fatos nos cálculos seguintes.

Aplicando a regra da cadeia a $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, vem:

$$g_r(r,\theta) = 2rf(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + r^2 f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + r^2 f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Aplicando a regra da cadeia a $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, a $f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e a $f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, vem:

$$\begin{aligned}
g_{rr}(r,\theta) &= 2f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2rf_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + 2rf_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + \\
&\quad 2rf_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + r^2 f_{xx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos^2\theta + r^2 f_{xy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \\
&\quad 2rf_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + r^2 f_{yy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}^2\,\theta + r^2 f_{yx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\
&= 2f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 4r\cos\theta f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 4r\,\mathrm{sen}\,\theta f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \\
&\quad r^2\cos^2\theta f_{xx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta f_{yy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta f_{xy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).
\end{aligned}$$

(b) Fazendo $r = 0$ na equação acima e usando que $f(0,0) = 1$, vem: $g_{rr}(0,\theta) = 2f(0,0) + 0 = 2$.