P2 - Cálculo II - Gabarito

18.10.10

Turma A e turma B

Questão 2: (3 pts) Seja $f(x,y) = (xy)^{1/3}$.

(a) Calcule as derivadas parciais de f nos pontos (x, y) tais que $xy \neq 0$.

(b) Calcule as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

(c) Existem $f_x(0, b)$ e $f_y(a, 0)$ quando a e b são não-nulos?

(d) Determine os pontos em que f é diferenciável. Justifique.

(a) $$f(x,y) = (xy)^{1/3} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3}\cdot y = \frac{1}{3}\frac{y}{(xy)^{2/3}}, & xy \neq 0 \\ f_y(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3}\cdot x = \frac{1}{3}\frac{x}{(xy)^{2/3}}, & xy \neq 0 \end{cases}$$

(b) $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \therefore f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0 \therefore f_y(0,0) = 0$$

(c) $$f_x(0,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,b)-f(0,b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(hb)^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^{1/3}}{h^{2/3}} = \begin{cases} +\infty, & b>0 \\ -\infty, & b<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists\ f_x(0,b)$, se $b \neq 0$.

$$f_y(a,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,k)-f(a,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{(ak)^{1/3}}{k} = \lim \frac{a^{1/3}}{k^{2/3}} = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists\ f_y(a,0)$, se $a \neq 0$.

(d) • No $(0,0)$: $$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\overbrace{f_x(0,0)}^{=0}h-\overbrace{f_y(0,0)}^{=0}k}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(hk)^{1/3}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Para $h = k$, $$\lim_{(h,h)\to(0,0)}\frac{E(h,h)}{\|(h,h)\|} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}}{\sqrt{2}\,|h|} = \lim \frac{1}{\sqrt{2}\,|h|^{1/3}} = +\infty.$$

$\Rightarrow f$ não é diferenciável no $(0,0)$.

- Em $(a,0)$, com $a \neq 0$, f não é diferenciável, pois $\nexists\ f_y(a,0)$.
- Em $(0,b)$, com $b \neq 0$, f não é diferenciável, pois $\nexists\ f_x(0,b)$.
- Em (x,y), $xy \neq 0$: as derivadas parciais existem e são contínuas $\Rightarrow f$ é diferenciável

Conclusão: f é diferenciável no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$.