

MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2010

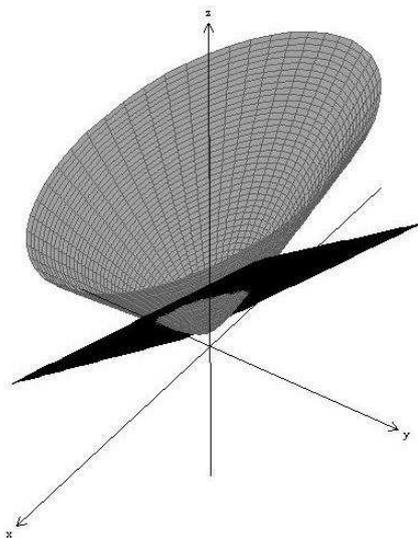
3ª Lista de Exercícios

- 1-) Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.
- 2-) Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C , bem como os pontos onde estes valores são assumidos, onde:
- (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3y$.
- (b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.
- (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = xz + y$.
- (d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- 3-) Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.
- 4-) Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).
- 5-) Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.
- 6-) Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.
- 7-) Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.
- 8-) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1) \in \text{Im}\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.
- 9-) Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - (z-1)^2 = 0$ nos pontos $(2, 2, 2)$ e $(2, 2, 0)$.
- 10-) Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
- a) $f(x, y, z) = xe^z + \sin(y)$, $(2, 0, 0)$ b) $f(x, y, z) = -\frac{4}{y} + z \ln(x)$, $(1, 2, -1)$

- 11-) Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
- Ache a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $v = i + j - k$.
 - Em que direção V muda mais rapidamente em P ?
 - Qual é a maior taxa de variação em P ?
- 12-) Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D .)
- $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$
 - $f(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$
 - $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 - $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$
- 13-) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:
- $f(x, y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$
 - $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
 - $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$
- 14-) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo
- $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $R = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$
- 15-) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x, y)$ em D sendo:
- $f(x, y) = xy$; $D = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$
 - $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, 1/4], y \geq 0\}$
- Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver esse exercício?
- 16-) a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.
b) Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?
- 17-) Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.
- 18-) Determine a distância entre as retas de equação
 $X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1, 0, 3) + \mu(-2, 3, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- 19-) Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?
- 20-) Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.
- 21-) Seja $T(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x, y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x + 1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima?
- 22-) Seja $b \in \mathbb{R}^*$ e $f(x, y) = \frac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.
- Determine, em função de b , o número de pontos críticos de f e classifique-os.
 - Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.

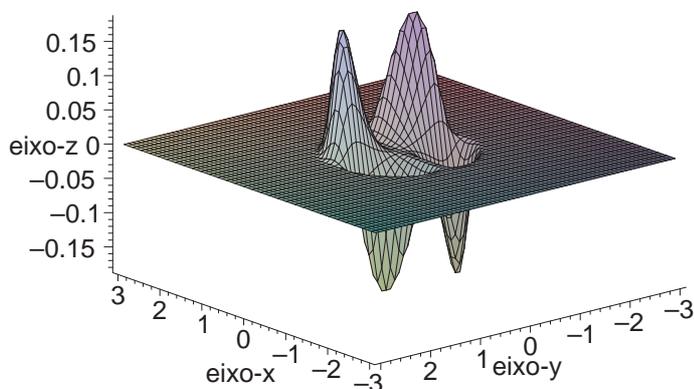
- 23-) Seja $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.
- (a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .
- (b) Para cada valor de k , classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f ?
- 24-) A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.
- 25-) Considere o seguinte problema: “Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2, z > 0$ ”.
- a) Mostre que o problema tem solução.
- b) Resolva o problema.
- 26-) Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C , sem parametrizar C , onde:
- (a) $f(x, y, z) = x + y + z$ e $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$.
- (b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$
- (c) f e C como no exercício 5.a);
- (d) f e C como no exercício 5.b).
- 27-) Seja $f(x, y, z) = 2x + y - z^2$.
- a) Seja S a parte do hiperbolóide $4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ onde $z > 0$. Seja C o compacto que é a intersecção de S com o plano $2z = 2x + y + 4$. Encontre o máximo e o mínimo de f em C .
- b) Seja R o compacto
- $$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0, \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}.$$

Encontre o mínimo de f em R .

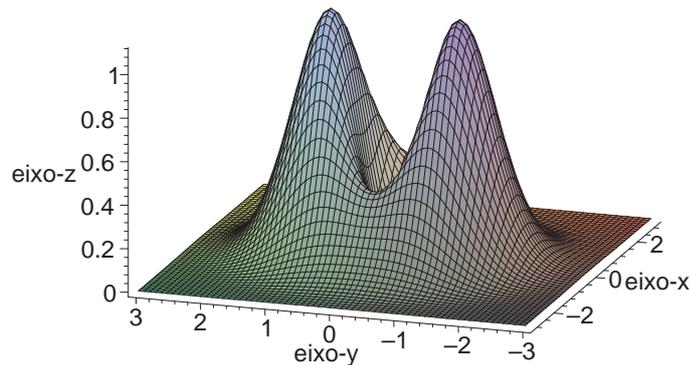


RESOLVA OS EXERCÍCIOS 28 A 32, A SEGUIR, ASSUMINDO QUE CADA PROBLEMA PROPOSTO TEM SOLUÇÃO. É POSSÍVEL PROVAR QUE ESSAS SOLUÇÕES EXISTEM. TENDE FAZÊ-LO.

- 28-) Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.
- 29-) Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.
- 30-) Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.
- 31-) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.
- 32-) Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.
- 33-) Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:
- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ | b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ |
| c) $z = x^2y^2$ | d) $z = x^3y^3$ |
| e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ | f) $z = y \cos x$ |
| g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ | h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$ |
| i) $z = xye^{-x^2-y^2}$ | j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ |
| k) $z = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$ | |
- 34-) A figura abaixo exhibe o gráfico de $f(x, y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)^4}$.
- Mostre que há um número infinito de pontos críticos.
 - Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.
 - Classifique os demais pontos críticos.



- 35-) A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Mostre que há 5 pontos críticos e ache os extremos de f .



- 36-) Determine os valores de a para os quais a função

$$f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

- a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
 b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
 Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
 Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

- 37-) É impossível para uma função contínua de \mathbb{R} em \mathbb{R} ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Verifique que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

- 38-) Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

- 39-) [MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS] Sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq n$ (dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leq i \leq n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leq i \leq n$, é, em geral, sobredeterminado se $n \geq 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, i.e. que minimize a soma dos quadrados dos erros $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $E(a, b) \doteq \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$. Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.

RESPOSTAS

1. $\pm \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.
2. (a) pontos de máximo: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$; pontos de mínimo: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$. (b) ponto de máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$; ponto de mínimo: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$. (c) ponto de máximo: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$; ponto de mínimo: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$. (d) ponto de mínimo: $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right)$; não tem ponto de máximo.
6. (5, 8, 6).
7. $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.
8. $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$.
9. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$
10. a) $\sqrt{6}$; (1, 1, 2) b) $\sqrt{2}$; (-1, 1, 0).
11. a) $\frac{32}{\sqrt{3}}$ b) (38, 6, 12) c) $2\sqrt{406}$.
12. a) máximo: $f(4, 5) = 13$, mínimo: $f(4, 0) = -7$; b) máximo: $f(0, 0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2e}$; c) máximo: $f(1, 0) = 2$, mínimo: $f(-1, 0) = -2$; d) máximo: $f(2, 0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, -\frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
13. a) máx $f(2, 2) = f(-2, -2) = 4$; mín $f(4, -4) = f(-4, 4) = -16$; b) máx $2/\sqrt{3}$, mín $-2/\sqrt{3}$; c) máx $1/27$, mín 0; d) máx $\sqrt{3}$, mín 1.
14. a) Valor mínimo: -14, Ponto de mínimo (1, 2, 3); Valor máximo 112, Ponto de máximo (-2, -4, -6)
15. a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; b) mínimo: $\frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo 1.
16. (a) (1, 1) e (-1, -1); (b) (0, -1, 2).
17. $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{100}{3}$.
18. $\sqrt{12}$.
19. (0, 0, 1) ou (0, 0, -1).
20. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
21. ponto de máximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$; não há ponto de mínimo.
22. a) Se $b > 0$, temos 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1 \right)$ e (0, -2) pontos de sela; (0, -2) máx. local e (0, 2) mín. local; e se $b < 0$, temos 3 pontos críticos: (0, 0) e (0, 2) pontos de sela; (0, -2) mín. local.
 b) Pontos de máx: (-3, 3) e (3, 3); ponto de mín. (0, 2).

23. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0, 0)$ é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: $(0, 0)$ é ponto de máximo global.
24. Mais quentes: $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$; Mais frios : $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$.
25. O paralelepípedo tem vértices em $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, \pm 1, 2)$.
26. (a) pontos de mínimo: $(0, 1, -2)$ e $(1, 0, -2)$; ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$.
 (b) pontos de mínimo: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; pontos de máximo: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$.
27. a) Ponto mínimo: $(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7})$ valor mínimo: $-19 - 6\sqrt{7}$
 Ponto de máximo: $(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 - \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7})$ valor mínimo: $-19 + 6\sqrt{7}$
 b) Ponto de mínimo: $(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7})$ valor mínimo: $-19 - 6\sqrt{7}$
 Ponto de máximo: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ valor mínimo: $-\frac{1}{2}$
28. $12(2 - \sqrt{3})$, $2(3 - \sqrt{3})$, $4(2\sqrt{3} - 3)$
29. $x + y + 2z - 6 = 0$
30. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
 $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.
31. base 3×3 cm, altura 1,5cm.
32. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.
33. a) $(-3, 2)$ mínimo; b) $(2/3, 1)$, $(-4/3, -1)$ selas; c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) $(4, 4)$ máximo; f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; g) $(1, 1)$ máximo, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ selas; h) $(0, 0)$ máximo, $(0, 2)$ mínimo, $(0, -2)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$ selas; i) $(0, 0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; j) $(1/3, 0)$ mínimo; k) $(2, 1)$ e $(0, 3)$ sela; $(2, 3)$ mínimo e $(0, 1)$ máximo.
34. a) $(a, 0)$ é ponto crítico $\forall a \in \mathbb{R}$. b) $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$, $\pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$.
35. mínimo $f(0, 0) = 0$; máximo $f(0, \pm 1) = 3e^{-1}$
36. a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) não d) $a = 0$.