# MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II
## 2ª lista de exercícios - 2010

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde $a$ e $b$ são constantes.

3. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   **Sugestão:** Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

4. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

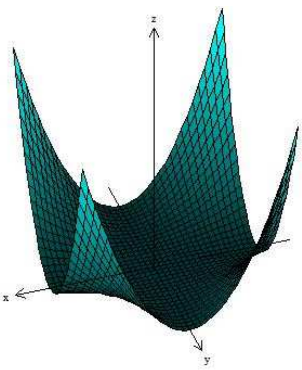
5. Sejam $f$ e $g$ funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem.

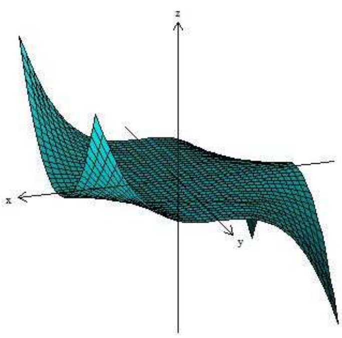
   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

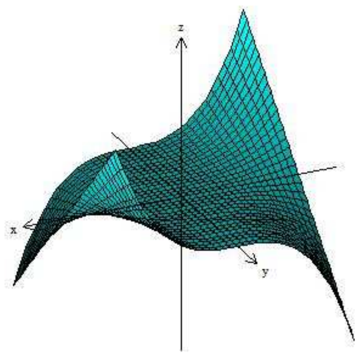
   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função $f$ e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua escolha.


(a)


(b)


(c)

7. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que $f$ e $g$ são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \operatorname{sen}(x+3y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

   (b) $f$ é contínua em (0,0)?

   (c) $f$ é diferenciável em (0,0)?

9. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que $f$ é contínua em (0,0).

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) É $f$ diferenciável em $(0,0)$?

   (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

10. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Mostre que $f$ é diferenciável em $(0,0)$.

    (b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\operatorname{sen}\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que $f$ é contínua em $(0,0)$.

    (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

    (d) A função $f$ é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

12. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo $y$, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo $x$.

    (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

13. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde $f$ **não** é diferenciável nos seguintes casos:
    (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$
    (c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

14. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

15. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

    (a) $w = x^2+y^2; x = t^2+u^2, y = 2tu.$ (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\mathrm{sen}u.$

    (c) $w = x^2+y^2+z; x = tu, y = t+u, z = t^2+u^2.$

16. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

17. Um carro $A$ está viajando para o norte a 90km/h e um carro $B$ está viajando para o oeste a 80km/h. O carro $A$ está se aproximando e o carro $B$ está se distanciando da intersecção das duas estradas. Em um certo instante, o carro $A$ está a 0,3km da intersecção e o carro $B$ a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?

18. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $g(t) = f(2t^3-4t, t^4-3t)$. Sabendo que $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$, determine $a$ para que a reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x+3$.

19. Seja $f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e sejam $a$, $b$, $c$, $d$ constantes tais que $a^2+b^2 = 1$, $c^2+d^2 = 1$ e $ac+bd = 0$. Seja $g(u,v) = f(au+bv, cu+dv)$. Mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv, cu+dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv, cu+dv).$$

20. (a) Seja $v(r,s)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$, onde $c$ é constante. Verifique que:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = w(x+ct, x-ct),$$

onde $w(r,s) = -4c^2 v_{rs}(r,s)$.

*(b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ então existem funções $F$ e $G$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$.

* **Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também o Exercício 5 (a).

21. Seja $u = u(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta)$. Verifique que
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta),$$
onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

22. Seja $f = f(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s,t) = f(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}t)$, mostre que
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}t)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}t)\right]^2 = \mathrm{e}^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]$$
e que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}t) = \mathrm{e}^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t)\right].$$

23. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$.
    (a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de $f$.
    (b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de $f$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

24. Seja $F(r,s) = G(\mathrm{e}^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
    (a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de $G$.
    (b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

25. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:
    (a) $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$.
    (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$.
    (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$.
    (d) $z = \mathrm{e}^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

26. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

27. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

28. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

29. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

30. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de $f$ no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

31. Seja $r$ a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta $r$.

32. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Fixado um certo $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de $f$ que contém o ponto $P$:

    (a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$; (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$; (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

33. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f$ com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $\big(0, 2, f(0,2)\big)$. Seja

    $$g(u,v) = u\, f\big(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2v\big).$$

    Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $g$ no ponto $\big(1,1,g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.

34. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2,t,2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de $f$. Determine o gradiente de $f$ no ponto $(2,1)$.

35. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t > 0$ em um ponto $P$. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de $f$ que contém $P$, no ponto $P$.

36. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2+1, t^3+t^2+t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Admita que existem 2 pontos $(x_0, y_0) \in \mathrm{Im}\gamma$ com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de $f$ em $(x_0, y_0, 2)$ é paralelo ao plano $x + y - z = 0$. Encontre esses 2 pontos.

37. Ache a derivada direcional máxima de $f$ no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-y} + 3y$, $(1,0)$;  (b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1,2)$;

38. Seja $f$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A(1,3)$, $B(3,4)$, $C(2,4)$ e $D(6,15)$. Sabe-se que a derivada direcional de $f$ em $A$ na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AB}/||\overrightarrow{AB}||$ é $3\sqrt{5}$ e que a derivada direcional de $f$ em $A$ na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AC}/||\overrightarrow{AC}||$ é $\sqrt{8}$. Encontre o vetor gradiente $\nabla f(1,3)$ e a derivada direcional de $f$ em $A$ na direção e sentido do versor $\vec{u} = \overrightarrow{AD}/||\overrightarrow{AD}||$.

39. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É $f$ diferenciável em $(0,0)$?

40. Seja $f$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de $f$. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de $f$ no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do versor de $\vec{v} = (3,4)$.

41. Sejam $f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

    (I) $\nabla f(x_0, y_0)$ é tangente à curva $xy^3 - x^3y - 2xy - y^3 + 6 = 0$ no ponto $(1,2)$;

    (II) a derivada direcional de $f$ no ponto $(x_0, y_0)$ na direção do vetor $\vec{w} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ é igual a $9/\sqrt{2}$.

    Determine todos os pontos $(x_0, y_0)$ para os quais se tem simultaneaneamente as condições (I) e (II) acima satisfeitas.

42. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Calcule o gradiente de $f$ no ponto $(0,0)$.

(b) Mostre que $\dfrac{d}{dt}f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (m, n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.

(d) É $f$ diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

43. Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de $f$ contém as imagens de ambas curvas

$$\gamma(t) = (-t/2, t/2, t/2)\,,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma(u) = \big(u + 1, u, u + 2 + u^{-1}\big)\,,\ u \in \mathbb{R}^*.$$

Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

44. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que a imagem da curva

$$\gamma(t) = \big(t, -t, -2t^3 - 2t^2\big)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

esteja contida no gráfico de $f$. Sabe-se ainda que a reta tangente, no ponto $(1, -1)$, à curva de nível de $f$ que contém este ponto tem equação $2x - 3y - 5 = 0$. Determine o gradiente de $f$ em $(1, -1)$ e determine o menor valor que uma derivada direcional pode assumir neste ponto.

## RESPOSTAS

1) (a)$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$;  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

2) (a)$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$;

(b)$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by)$.

3) $-2$  6) $f$ é (b); $\frac{\partial f}{\partial x}$ é (a) e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é (c).  8) Não é contínua nem diferenciável em $(0,0)$.

9) (b)$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.  (c) Não.  d)$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são ambas descontínuas em $(0,0)$.

10) (b) Não

11) (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\,\mathrm{sen}((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) Sim.  (d) Sim.

13) (a) $f$ não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.

(b)$f$ não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$.

(c) $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^2$.  (d) O mesmo que o item (c).

16) $-9600\pi$ cm$^3$/s  17) Distanciando-se a 10km/h.  18) $a = 3$  23) b) 21.

24)(a)$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s\cos s\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4\cos^2 s\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs}\frac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s\frac{\partial G}{\partial y}$;  (b)0.

25) (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b)$2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(d)$e^3y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

26) $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um)  27) $6x - y - z + 6 = 0$  28) $k = 8$

30) $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.  31) $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5,-4), \lambda \in \mathbb{R}$.

32) (c)  33) $a = -4$  34) $(1,4)$  35) $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

36) $(2,-1)$ e $(10/9, -7/27)$.  37) (a) $\sqrt{5},\ (1,2)$;  (b) $\frac{2}{\sqrt{5}},\ \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

38) $\nabla f(1,3) = (11,-7)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} - 29/13$.  39) $f$ não é diferenciável em $(0,0)$.

40) $4/5$  41) $\pm(\sqrt{6}, 3\sqrt{6}/2)$  42) (d) Não é.  43) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

44) $\nabla f(1,-1) = (-4,6)$ e $-\sqrt{52}$ é o mínimo valor entre as derivadas direcionais neste ponto.