MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

1ª lista de exercícios - 2010

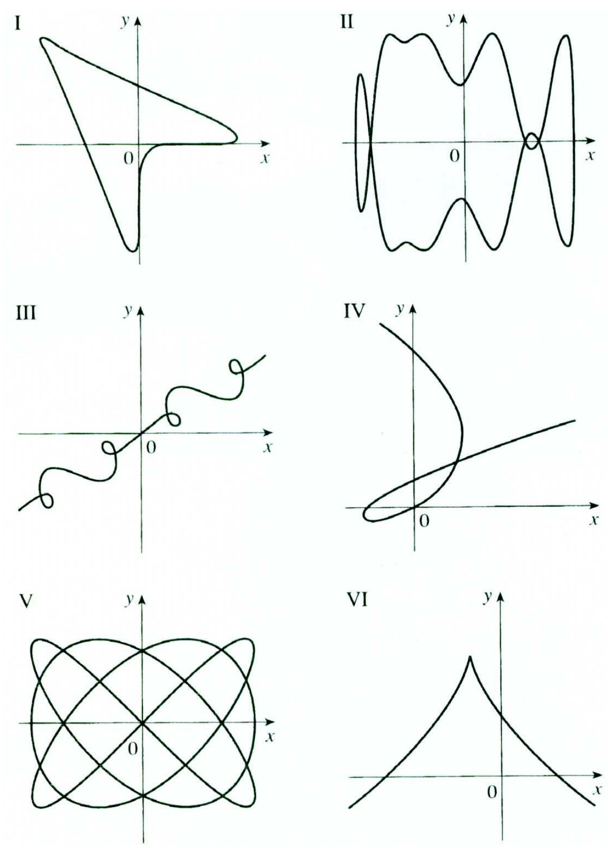
CURVAS E SUPERFÍCIES

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t)$
   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
   (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$
   (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$
   (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$
   (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$
   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t)$

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

   (a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$
   (b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$
   (c) $x = \operatorname{sen}(3t), \quad y = \operatorname{sen}(4t)$
   (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t), \quad y = t + \operatorname{sen}(3t)$
   (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), \quad y = \cos(t + \cos t)$
   (f) $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$



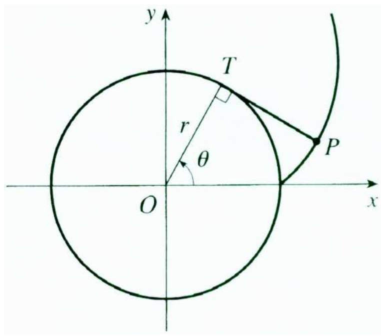
3. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

4. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\,,\ \operatorname{sen}\, t \cos\, t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações.

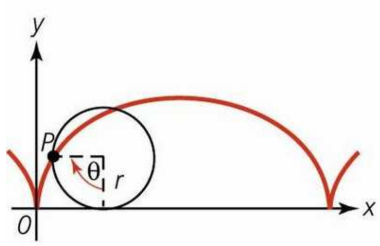
5. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

6. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



7. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de ciclóide; veja figura.)



8. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ (b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^x}$

(e) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x - y)$ (f) $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$

(g) $f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

9. Esboce uma família de curvas de nível de:

(a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ (b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

10. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$

(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$

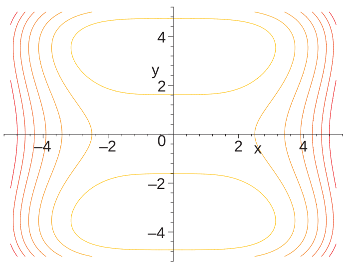
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$

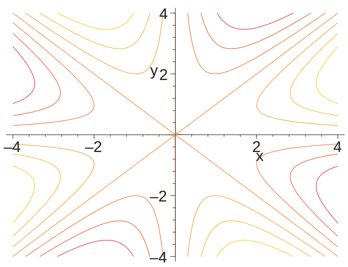
(m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2 + y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$

(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

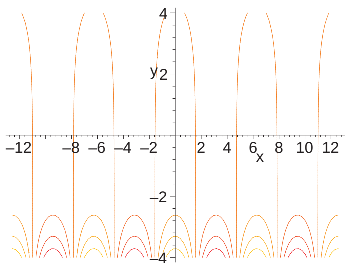
11. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.



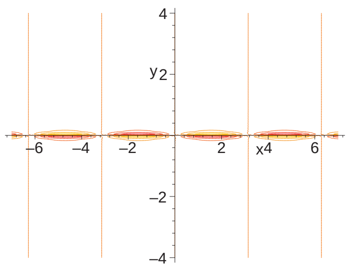
(I)



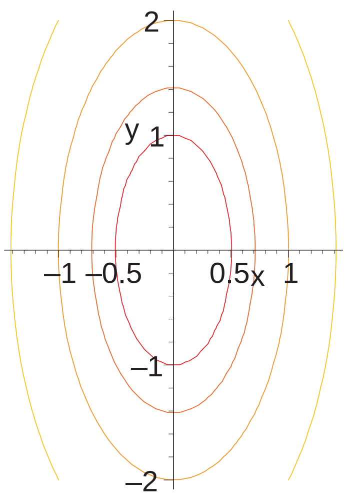
(II)



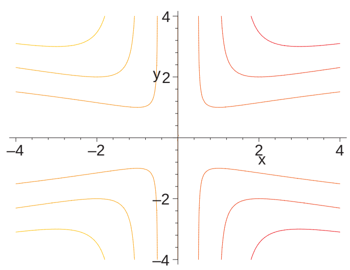
(III)



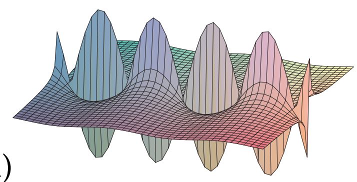
(IV)

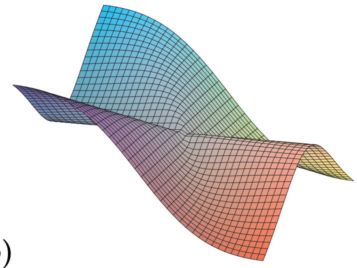


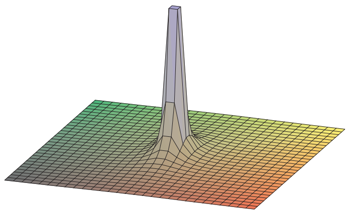
(V)

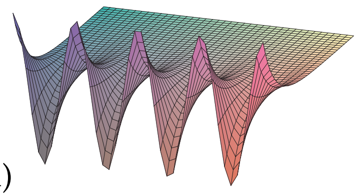


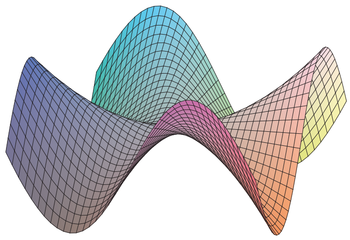
(VI)

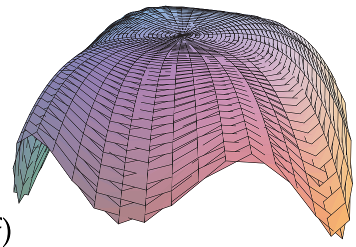

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

12. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

    (b) A imagem de γ está contida na curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

13. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

    (a) $z + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
    (d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
    (g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

    Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

14. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0, 0, 0)$ e esboce a imagem de γ.

15. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1}\cos t, \sqrt{t^2 + 1}\operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

16. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

    (a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
    (c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t})$, $t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$
    (e)$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

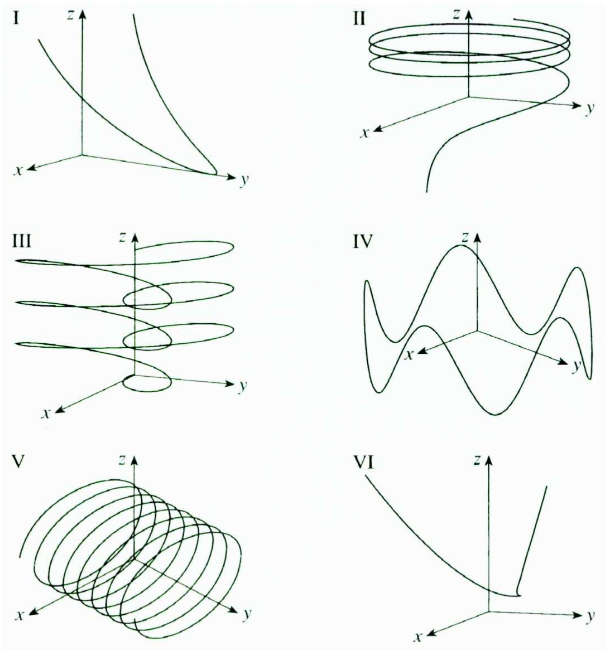
17. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t) = (t\ \cos t, t \operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$.

    (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

    (b) Faça um esboço da imagem de γ.

18. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

    (a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2-2, t^3, t^4+1)$
    (c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t\ \cos t, \operatorname{sen} 3t\ \operatorname{sen} t, t)$
    (e)$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$



19. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível k de f nos casos:

    (a) $f(x,y) = x + 2y - 3,\ k = -2;$

    (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2},\ k = 5;$

    (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2},\ k = 1.$

    Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

20. (a) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2+y^2 = 1$.
    (b) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção da superfície $x^2+y^2-2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z+1$.
    (c) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2+y^2 = z$.
    (d) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do cone $z = \sqrt{4x^2+y^2}$ com o plano $z = 2x+1$.

21. Encontre uma parametrização para C e a reta tangente a C no ponto P, onde:

   (a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

   (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (0,1,1)$.

   (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

22. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

   (a) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

   (b) Encontre uma função γ derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

   (c) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

   (d) Seja $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

LIMITES E CONTINUIDADE

23. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4 + x^2 y + y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2 + y^2}$

   (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y + y^4 + x^4}{x^3 - xy^3}$

   (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{y^4 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}$

24. Calcule os seguintes limites:

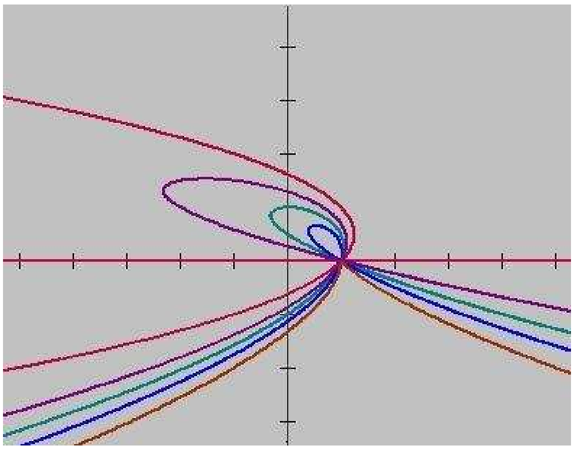
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

25. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^2)(x-1)^2}{(x^2 + y^2)[(x-1)^2 + (y-1)^2]} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

26. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



RESPOSTAS

3. Não. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

4. $y = x$ e $y = -x$.

8. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$
   (b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$
   (c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
   (d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
   (e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
   (f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$
   (g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 16\}$

12. (b) Sim, no nível 5.

13. Apenas a superfície do item (a).

23. (a) não existe (b) 0 (c) 0
    (d) não existe (e) não existe (f) não existe
    (g) não existe (h) 0 (i) 0
    (j) 0 (k) não existe (l) 1

24. (a) 1 (b) 0

25. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$