B

4. Sejam S_1 e S_2 as superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = (x-1)^2 - y^2\} \text{ e } S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x^2 + y^2 - 2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção de S_1 e S_2. Isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ tal que a imagem de γ seja igual a $S_1 \cap S_2$.

(b) **(1,0)** Determine a equação da reta tangente a $S_1 \cap S_2$ no ponto $(0, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2})$.

(a) Seja $(x,y,z) \in S_1 \cap S_2$. Então

$z = (x-1)^2 - y^2 = 2x^2 + y^2 - 2$

Logo $x^2 + 2x + 1 + 2y^2 = 4 \Rightarrow$

$(x+1)^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow$

$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad (*)$

Para cada par (x,y) que satisfaz $(*)$, $\exists\, t \in [0, 2\pi[$ tal que $\frac{x+1}{2} = \cos t$ e $\frac{y}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$.

Reciprocamente, se $\frac{x+1}{2} = \cos t$ e $\frac{y}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$, então (x,y) satisfaz $(*)$.

Assim $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ se, e só se $\exists\, t \in [0, 2\pi[$ tal que $x = 2\cos t - 1$, $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$

Como $z = 2x^2 + y^2 - 2 \Rightarrow z = 2(2\cos t - 1)^2 + 2\operatorname{sen}^2 t - 2$

Assim: $\gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (2\cos t - 1, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2(2\cos t - 1)^2 + 2\operatorname{sen}^2 t - 2)$

é uma parametrização para $S_1 \cap S_2$.

(b) Queremos achar $t_0 \in [0, 2\pi[$ com $\gamma(t_0) = (0, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2})$

Assim $2\cos t_0 - 1 = 0$ (e com isto $2(2\cos t_0 - 1)^2 + 2\operatorname{sen}^2 t_0 - 2 = -\frac{1}{2}$)

$\sqrt{2}\operatorname{sen} t_0 = \sqrt{6}/2$

Logo: $\cos t_0 = 1/2$ e $\operatorname{sen} t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Como $\vec{\gamma}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 4(2\cos t - 1)(-2\operatorname{sen} t) + 4\operatorname{sen} t \cos t)$

temos que $\vec{\gamma}'(\pi/3) = (-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}) \neq \vec{0}$.

Assim, uma equação vetorial para a reta tangente é:

$X = (0, \sqrt{6}/2, -\frac{1}{2}) + \lambda\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.