4. Sejam S_1 e S_2 as superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = (y-1)^2 - x^2\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + 2y^2 - 2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção de S_1 e S_2. Isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ tal que a imagem de γ seja igual a $S_1 \cap S_2$.

(b) **(1,0)** Determine a equação da reta tangente a $S_1 \cap S_2$ no ponto $(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

(a) Seja $(x, y, z) \in S_1 \cap S_2$. Então

$z = (y-1)^2 - x^2$ e $z = x^2 + 2y^2 - 2$

Logo $(y-1)^2 - x^2 = x^2 + 2y^2 - 2$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 - x^2 = x^2 + 2y^2 - 2$

$\Rightarrow 2x^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0$

Logo $(\sqrt{2}x)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1.}$ (*)

Para cada (x, y) que satisfaz (*), existe $t \in [0, 2\pi[$

tal que $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \cos t$ e $\left(\frac{y+1}{2}\right) = \text{sen}\, t$

Reciprocamente, se $\frac{x}{\sqrt{2}} = \cos t$ e $\frac{y+1}{2} = \text{sen}\, t$ então $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1$ se e só se (x, y) satisfaz (*). Assim, existe $t \in [0, 2\pi[$ com $x = \sqrt{2}\cos t$ e $y = 2\,\text{sen}\, t - 1$.

Como $z = x^2 + 2y^2 - 2$ temos que

$$\boxed{\begin{aligned} &\gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t - 1,\ 2\cos^2 t + 2(2\,\text{sen}\, t - 1)^2 - 2) \end{aligned}}$$

é uma parametrização de $S_1 \cap S_2$.

(b) Encontrar $t_0 \in [0, 2\pi[$ tal que

$\gamma(t_0) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{2}\cos t_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &2\,\text{sen}\, t_0 - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\, t_0 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$$

Observe que $z = 2 \cdot \frac{3}{4} - 2 = -\frac{1}{2}$.

Agora, $\vec{\gamma}'(t) = (-\sqrt{2}\,\text{sen}\, t,\ 2\cos t,\ -4\cos t\,\text{sen}\, t + 4(2\,\text{sen}\, t - 1)2\cos t)$

$\vec{\gamma}'(\pi/3) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) \neq \vec{0}$

Assim uma equação da reta tangente é:

$X = (\sqrt{6}/2, 0, -1/2) + \lambda(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}),\ \lambda \in \mathbb{R}$