

Questão 3. (2,0) Seja $f(x, y) = \frac{(x-1)^2 + 3(y-1)^2}{y^2 - x^2}$.

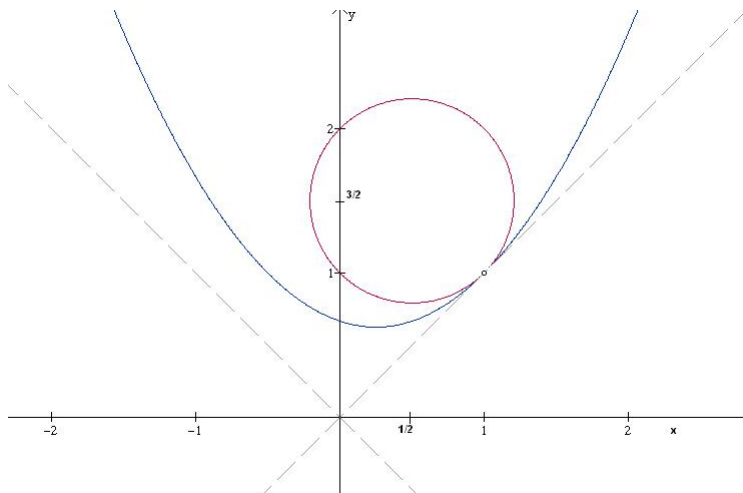
- Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.
- Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$? **Justifique.**

a) Domínio de $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\}$.

$$\begin{aligned} f(x, y) = k &\Leftrightarrow (x-1)^2 + 3(y-1)^2 = ky^2 - kx^2 \text{ e } |x| \neq |y| \\ &\Leftrightarrow (3-k)y^2 - 6y + (1+k)x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ e } |x| \neq |y|. \end{aligned}$$

Se $k=3$: $-6y + 4x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(2x^2 - x + 2)$ (Parábola).

Se $k=1$: $2x^2 - 2x + 2y^2 - 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}$ (Círculo).



b) $\lim_{t \rightarrow 1} f(t, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)^2}{1-t^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{1+t} = 0$.

Por outro lado, a imagem da curva $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$, ($t \in [0, 2\pi]$) está contida na curva de nível $k = 1$ para $t \neq \frac{7\pi}{4}$ e $\gamma(\frac{7\pi}{4}) = (1, 1)$. Assim, $\lim_{t \rightarrow \frac{7\pi}{4}} f(\gamma(t)) = 1$ e vemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ não existe.