A

Questão 3. (2,0) Seja $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2 - y^2}$.

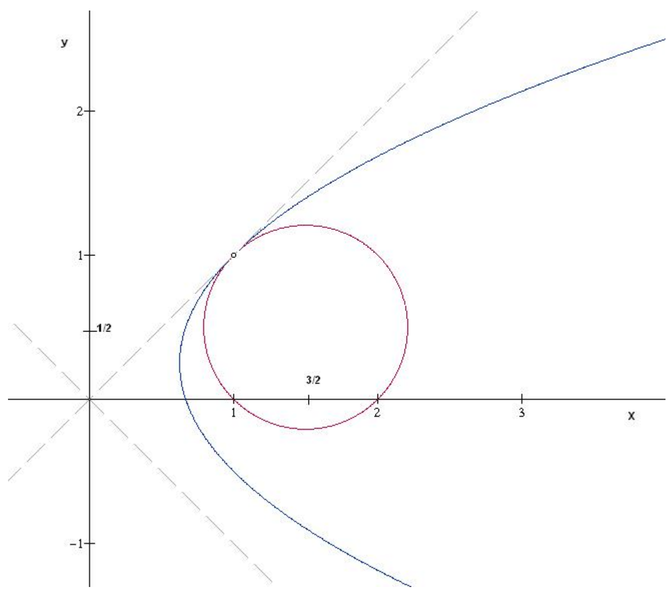
1. Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.

2. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? **Justifique.**

a) Domínio de $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = k \quad &\Leftrightarrow \quad 3(x-1)^2 + (y-1)^2 = kx^2 - ky^2 \ \text{ e } \ |x| \neq |y| \\ &\Leftrightarrow \quad (3-k)x^2 - 6x + (1+k)y^2 - 2y + 4 = 0 \ \text{ e } \ |x| \neq |y|. \end{aligned}$$

<u>Se k=3:</u> $\quad -6x + 4y^2 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(2y^2 - y + 2)$ (Parábola).
<u>Se k=1:</u> $\quad 2x^2 - 6x + 2y^2 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ (Círculo).



b) $\lim\limits_{t\to1} f(1,t) = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{(t-1)^2}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{1-t}{1+t} = 0.$

Por outro lado, a imagem da curva $\gamma(t) = (\frac{3}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$, $(t \in [0, 2\pi])$ está contida na curva de nível $k = 1$ para $t \neq \frac{3\pi}{4}$ e $\gamma(\frac{3\pi}{4}) = (1,1)$. Assim, $\lim\limits_{t\to\frac{3\pi}{4}} f(\gamma(t)) = 1$ e vemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ não existe.