B

2. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) **(1,0)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3y+2y^3-x^7}{x^6+5y^2}$

(b) **(1,0)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

a) Seja $f(x,y) = \frac{4x^3y+2y^3-x^7}{x^6+5y^2}$. Temos: $f(t,0) = \frac{-t^7}{t^6} = -t$ se $t \neq 0$

e $f(t,t^3) = \frac{4t^6+2t^9-t^7}{6t^6} = \frac{2}{3} - \frac{t^3}{3} - \frac{t}{6}$, se $t \neq 0$. Quando $t \to 0$,

temos que $(t,0) \to (0,0)$ e $(t,t^3) \to (0,0)$, mas

$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} -t = 0$ e $\lim_{t\to 0} f(t^3,t) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{2}{3} - \frac{t^3}{3} - \frac{t}{6}\right) = \frac{2}{3}$

Como esses dois limites são diferentes, concluímos que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\underset{\downarrow 0}{y}\ \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)}_{\downarrow 1/2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Justificativa: 1) a função $h(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitada (pois $0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 1$) e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$. Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$

2) $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2}$

Como $x^2+y^2 \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$, temos que

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = 0$