A

2. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) **(1,0)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^3+2x^3-y^7}{x^2+5y^6}$

(b) **(1,0)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

a) Seja $f(x,y) = \dfrac{4xy^3+2x^3-y^7}{x^2+5y^6}$. Temos: $f(t,0) = \dfrac{2t^3}{t^2} = 2t$ se $t \neq 0$

e $f(t^3,t) = \dfrac{4t^6+2t^9-t^7}{6t^6} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t}{6}$, se $t \neq 0$. Quando $t \to 0$, temos que

$(t,0) \to (0,0)$ e $(t^3,t) \to (0,0)$, mas $\lim_{t\to0} f(t,0) = \lim_{t\to0} 2t = 0$ e

$\displaystyle\lim_{t\to0} f(t^3,t) = \lim_{t\to0}\left(\frac{2}{3} - \frac{t^3}{3} - \frac{t}{6}\right) = \frac{2}{3}$. Como esses dois limites são diferentes, concluímos que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\underset{\downarrow\, 0}{x}\,\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2}}_{\downarrow\, 1/2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Justificativa: 1) a função $h(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada (pois $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 1$) e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Logo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$

2) $$\lim_{t\to0} \frac{1-\cos t}{t^2} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to0} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Como $x^2+y^2 \to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to0} \frac{1-\cos t}{t^2} = 0$$