Máximos e mínimos de polinômios de grau 2 em duas variáveis

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + K, \qquad (*)$$

onde A, B, C, D, E e K são constantes com $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, isto é, f é um polinômio de grau 2 com coeficientes reais. Vamos provar o seguinte resultado:

Se (x_0, y_0) é um ponto de máximo **local** (ou mínimo **local**) de f então (x_0, y_0) é um ponto de máximo **global** (mínimo **global**) de f.

Demonstração:

Suponha que (x_0, y_0) é um ponto de máximo local (ou de mínimo local) de f. Então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f. Como as derivadas parciais de f são $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2Ax + 2Cy + E$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2By + 2Cx + F$, o ponto (x_0, y_0) é uma solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2Ax & + & 2Cy & = & -E \\ 2By & + & 2Cx & = & -F \end{array} \right. . \quad (S)$$

substituindo D e E em (*) temos:

$$f(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + (-2Ax_0 - 2Cy_0)x + (-2Cx_0 - 2By_0)y + K. \qquad (**)$$

Completando os quadrados em (**) obtemos que

$$f(x,y) = A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + 2C(x - x_0)(y - y_0) + L, \qquad (***)$$

onde $L = f(x_0, y_0)$. Agora, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2A$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2B$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2C$ e o Hessianno $H(x_0, y_0)$ é

$$H(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} 2A & 2C \\ 2C & 2B \end{bmatrix} = 4(AB - C^2).$$

(Observe que

$$\begin{bmatrix} 2A & 2C \\ 2C & 2B \end{bmatrix}$$

é a matriz do sistema linear (S). Logo, quando (x_0, y_0) é o **único** ponto crítico de f temos que $H(x_0, y_0) \neq 0$.)

Agora, se $A = B = 0$, então $C \neq 0$ e $H(x_0, y_0) = -4C^2 < 0$, e (x_0, y_0) é um ponto de sela de f. Suponha então que $A \neq 0$ (o caso $B \neq 0$ é análogo). Completando quadrados, escrevemos a expressão (***) como

$$f(x,y) = A[((x - x_0) + \frac{C}{A}(y - y_0))^2 + \frac{H(x_0, y_0)}{4A^2}(y - y_0)^2] + f(x_0, y_0).$$

Como (x_0, y_0) é um ponto de máximo local (ou de mínimo local), tem-se que $H(x_0, y_0) \geq 0$, pois se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) seria um ponto de sela de f.

Da última expressão acima, pode-se ver facilmente que (x_0, y_0) é ponto de máximo global ou mínimo global de f conforme $A < 0$ ou $A > 0$, já que a expressão entre os colchetes é sempre ≥ 0.

Usando Álgebra Linear, vamos agora classificar, no caso em que (x_0, y_0) é o único ponto crítico de f, a superfície quádrica que é o **gráfico** de f, ou seja,

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y) - z = 0\}.$$

Como já observamos, $H(x_0, y_0) \neq 0$. Escreva

$$f(x,y) - z = \frac{1}{2}X^t MX + [0\,0\ -1]X + f(x_0, y_0),$$

onde X é a matriz coluna $X = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z \end{bmatrix}$, X^t é a transposta de X e

$$M = \begin{bmatrix} 2A & 2C & 0 \\ 2C & 2B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$M' = \begin{bmatrix} 2A & 2C \\ 2C & 2B \end{bmatrix}$$

é uma matriz real *simétrica*. Logo existe uma matriz *ortogonal* P tal que $P^t M' P$ é diagonal. Se

$$P = \begin{bmatrix} m & n \\ r & s \end{bmatrix}$$

então a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

também é ortogonal e

$$Q^t M Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores reais de M'. Escrevendo

$$X = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z \end{bmatrix} = QX' = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$f(x,y) - z = \frac{1}{2}(X')^t(Q^t M Q)X' + [0\,0\,-1]QX' + f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}[\lambda_1(x')^2 + (\lambda_2)(y')^2] + f(x_0,y_0) - z,$$

já que $z = z'$.

Note que $H(x_0,y_0) = \det M' = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Assim a superfície quádrica é um **parabolóde elíptico** se λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal, e é um **parabolóide hiperbólico** se λ_1 e λ_2 têm sinais opostos.

A matriz Q é matriz de uma rotação de $\mathbb{R}^3$ que mantém o eixo z fixo. Com isso vemos que quando (x_0,y_0) é o **único** ponto crítico de f, o gráfico de f é um **parabolóide elíptico** com vértice em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ se $H(x_0,y_0) > 0$, e é f é um **parabolóide hiperbólico** se $H(x_0,y_0) < 0$.