Questão 4 - A

Sejam $f, g, h \ : \ R^3 \to \mathbb{R}^3$ dadas, respectivamente, por $f(x,y,z) = xz + y^2$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $h(x,y,z) = x + y^2 + z$. Encontre, caso existam, os pontos de máximo e de mínimo de f restrita ao conjunto fechado $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 1 \text{ e } h(x,y,z) = 1\}$.

Como $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = h(x,y,z)\}$ é fechado e limitado então ele é compacto. Como f é função contínua em R^3, segue do Teorema de Weirstrass que existem pontos de máximo e pontos de mínimo de f em B.

Como f, g, h são funções de classe $\mathbb{C}^1$, segue do Teorema de Lagrange que, nos pontos extremantes de f em B os gradientes ∇f, ∇g, ∇h devem ser linearmente dependentes.

Agora, se $\nabla g(x,y,z)$ e $\nabla h(x,y,z)$ são linearmente dependentes, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{cases} 2x = \lambda \ \ (1) \\ 2y = 2\lambda y \ \ (2) \\ 2z = \lambda \ \ (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \ (4) \\ x + y^2 + z = 1 \ \ (5) \end{cases}$$

De (1) e (3), obtemos $x = z$ e de (4) e(5) temos então $y^2 = 1 - 2z^2$ e $y^2 = 1 - 2z$. Segue que $z^2 = z \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$. Se $z = 0$, obtemos de (3), $\lambda = 0$ e então $x = y = 0$, por (1) e (3), em contradição com (4).

Se $z = 1$, $y^2 = 1 - 2$, e novamente temos contradição.

Portanto, se $\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z)$ e $\nabla h(x,y,z)$ são linearmente dependentes em $(x,y,z) \in B$, teremos

$$\begin{cases} z = 2\lambda x + \mu \ \ (1) \\ 2y = 2\lambda y + 2\mu y \ \ (2) \\ x = 2\lambda z + \mu \ \ (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \ (4) \\ x + y^2 + z = 1 \ \ (5) \end{cases}$$

De (1) e (3), temos $z - 2x = x - 2\lambda z \Leftrightarrow (1 + 2\lambda)z = (1 + 2\lambda x) \Leftrightarrow x = z$ ou $\lambda = -1/2$.

Se $x = z$, obtemos de (4) e (5) que $2z^2 = 2z \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$.

Se $z = 0$, então $x = 0$ e $y = \pm 1$ e obtemos os pontos $(0, \pm 1, 0)$.

Se $z = 1$, então $y^2 = -1$, contradição.

Se $\lambda = -1/2$, temos de (1) que $x + z = \mu$.

De (2), temos $2y = -y + 2\mu y \Leftrightarrow (2 - 2\mu)y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $\mu = 3/2$.

Se $y = 0$, obtemos de (5) que $z = 1 - x$ e, substituindo em (4) temos $2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Se $x = 0$ então $z = 1$ e obtemos o ponto $(0, 0, 1)$. Se $x = 1$, obtemos o ponto $(1, 0, 0)$.

Se $\mu - 3/2$, então $(x + z) = 3/2$ e, de (5) $y^2 = -1/2$, absurdo.

Comparando o valor de f nos pontos obtidos temos $f(0, 0, 1) = f(1, 0, 0) = 0$ e $f(0, \pm 1, 0) = 1$.

Concluímos que $(0, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$ são pontos de mínimo e $(0, \pm 1, 0)$ são pontos de máximo de f em B.