Questão 3 - A

Dadas as superfícies $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$:

a) (1 ponto) Determine a equação da reta normal a S_1 no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) (1 ponto) Encontre um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S_1$, tal que a reta normal a S_1 neste ponto esteja contida no plano de equação $y = z$ e intercepte S_2 em um ponto de cota $z = 1$.

a) Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Como f é diferenciável e $\nabla f = (2z, 2y, 2z) \neq 0$, nos pontos de S_1, a equação da reta normal em um ponto (x_0, y_0, z_0) será

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_0, y_0, z_0) = (1 + \lambda)(x_0, y_0, z_0).$$

Em particular, no ponto dado

$$(x, y, z) = (1 + \lambda)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

b) Como a reta está contida no plano $y = z$ sua equação será

$$(x, y, z) = (1 + \lambda)(x_0, y_0, y_0).$$

Suponhamos que (x, y, z) seja o ponto de interseção com S_2. Então temos

$$\begin{cases} x = (1+\lambda)x_0 \quad (1) \\ y = (1+\lambda)y_0 \quad (2) \\ z = (1+\lambda)y_0 \quad (3) \\ y = z = 1 \quad (4) \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + 2y_0^2 = 1 \quad (5) \\ z = x^2 + y^2 \quad (6) \end{cases}$$

De (4) e (6), obtemos $1 - x^2 + 1 \Rightarrow x = 0$. De (1), obtemos x_0 ou $(1 + \lambda) = 0$, Mas, se $(1 + \lambda) = 0$ então $z = 0$, em contradição com (4). Segue que $x_0 = 0$ e, de (5), $2y_0^2 = 1 \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Portanto,

$$(x_0, y_0, y_0) = \left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$