MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2009

Resolução da Questão 2 da SUB

2-) (2 pontos) Determine o conjunto dos pontos onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x^3+y^3}$ é diferenciável e encontre o vetor gradiente de f em cada um dos pontos deste conjunto.

Resp.:

Pela regra da cadeia, f é derivável no aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3+y^3=0\}$ e, para todo (x,y) neste aberto, tem-se $\nabla f(x,y) = \cos \sqrt[3]{x^3+y^3} \cdot \frac{1}{3}\left(x^3+y^3\right)^{-2/3} \cdot (3x^2, 3y^2) = \frac{\cos \sqrt[3]{x^3+y^3}}{(x^3+y^3)^{2/3}} \cdot (x^2, y^2)$.

Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^3+y^3=0$. Tem-se, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} &= \frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{(x+t)^3+y^3}}{t} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{(x+t)^3+y^3}}{\sqrt[3]{(x+t)^3+y^3}} \sqrt[3]{\frac{(x+t)^3+y^3}{t^3}} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{(x+t)^3+y^3}}{\sqrt[3]{(x+t)^3+y^3}} \sqrt[3]{3\frac{x^2+xt}{t^2}+1}\end{aligned}$$

Portanto, se existir a derivada parcial com respeito à primeira coordenada $\mathsf{D}_1 f(x,y) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}$, então $\lim\limits_{t \to 0} (x^2+xt) = 0$, portanto $x=0$. Analogamente, se existir $\mathsf{D}_2 f(x,y)$, então $y=0$, o que nos permite concluir que f não é derivável em $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^3+y^3=0$ e $(x,y) \neq \mathbb{O}$.

Afirmo que f não é derivável em $\mathbb{O}$. Isto pode ser verificado de duas maneiras:

Demonstração 1. Para todo $v = (h,k) \in \mathbb{R}^2$, tem-se $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbb{O}) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv)-f(\mathbb{O})}{t} = \sqrt[3]{h^3+k^3}$. Como $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(h,k) = \sqrt[3]{h^3+k^3}$ não é linear, segue-se que f não é derivável em $\mathbb{O}$.

Demonstração 2. Tem-se $\mathsf{D}_1 f(\mathbb{O}) = \mathsf{D}_2 f(\mathbb{O}) = 1$. Seja $\Delta : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Delta(h,k) \doteq \frac{f(h,k)-f(\mathbb{O})-h\mathsf{D}_1 f(\mathbb{O})-k\mathsf{D}_2 f(\mathbb{O})}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{h^3+k^3}-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Para todo $t \neq 0$, tem-se $\Delta(t,t) = \frac{\operatorname{sen}(t\sqrt[3]{2})-2h}{|t|\sqrt{2}}$; portanto, $\nexists \lim\limits_{t\to 0} \Delta(t,t)$ (pois os limites laterais em 0 existem e são distintos: pela direita o limite é $\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}$ e pela esquerda o limite é $-\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}$), donde $\nexists \lim\limits_{(h,k)\to\mathbb{O}} \Delta(h,k)$, ou seja, f não é derivável em em $\mathbb{O}$.

Conclusão: o conjunto dos pontos onde f é derivável é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3+y^3=0\}$.