MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2009

Resolução da Questão 1 da SUB

1-) (a) (1,5 ponto) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| e^{x^4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{4k}}{k!} \right| \leqslant \frac{e^{x^4} x^{4n+4}}{(n+1)!}$$

(b) (1,5 ponto) Calcule $\int_0^1 e^{x^4} dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

Resp.: (a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Tal função é de classe C^∞ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = f$, donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 1$. Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, o polinômio de Taylor de ordem n de f centrado em $0 \in \mathbb{R}$ é dado por $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Pela fórmula de Taylor de ordem n com resto de Lagrange, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ com $0 < |c| < |x|$ tal que $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$. Como f é estritamente crescente, se $0 < c < x$ tem-se $e^c < e^x$, donde $\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$. Assim, para todo $x > 0$, tem-se $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$, e em $x = 0$ vale a igualdade. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f(x^4) - P_n(x^4)| \leqslant \frac{e^{x^4} x^{4n+4}}{(n+1)!}$.

(b) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $P_n(x)$ como no item anterior. Usando propriedades da integral de Riemann e a desigualdade demonstrada no item anterior, tem-se: $|\int_0^1 e^{x^4}\, dx - \int_0^1 P_n(x^4)\, dx| = |\int_0^1 [e^{x^4} - P_n(x^4)]\, dx| \leqslant \int_0^1 |e^{x^4} - P_n(x^4)|\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{x^4} x^{4n+4}}{(n+1)!}\, dx$. Como, $\forall x \in [0,1]$, $e^x \leqslant e < 3$, tem-se $\int_0^1 \frac{e^{x^4} x^{4n+4}}{(n+1)!}\, dx \leqslant \frac{3}{(n+1)!} \int_0^1 x^{4n+4}\, dx = \frac{3}{(n+1)!(4n+5)}$, donde $|\int_0^1 e^{x^4}\, dx - \int_0^1 P_n(x^4)\, dx| \leqslant \frac{3}{(n+1)!(4n+5)}$. Se $n \geqslant 7$, tem-se $\frac{3}{(n+1)!(4n+5)} < 10^{-5}$, donde $|\int_0^1 e^{x^4}\, dx - \int_0^1 P_n(x^4)\, dx| \leqslant 10^{-5}$. Assim, $\int_0^1 P_7(x)\, dx = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!(4k+1)}$ é uma aproximação para $\int_0^1 e^{x^4} dx$ com erro inferior a 10^{-5}.