a) Como f é contínua e C é compacto, o problema tem solução. Para encontrar os pontos de máximo e mínimo, usaremos o teorema dos multiplicadores de Lagrange. B1

Consideremos $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z>0\}$, que é aberto, $g(x,y,z)=4x^2+y^2-z^2+1$, $h(x,y,z)=2x+y-2z+4$ e $f(x,y,z)=2x+y-z^2$ que são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

Temos que $C=\{(x,y,z)\in A : g(x,y,z)=0 \text{ e } h(x,y,z)=0\}$

Pelo teorema, se (x,y,z) é ponto de máximo ou de mínimo da restrição de f a C então $\nabla f(x,y,z)$ $\nabla g(x,y,z)$ e $\nabla h(x,y,z)$ são L.D. e portanto

$$= \det\begin{bmatrix} 8x & 2y & -2z \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2z \end{bmatrix} = -2z(2-2)+2z(8x-4y)+2(8x-4y) =$$

$= (2-2z)(8x-4y)$. Logo $z=1$ ou $y=2x$. Mas não existem pontos do tipo $(x,y,1)$ em C, pois o sistema $\begin{cases} 4x^2+y^2-1^2+1=0 \\ 2x+y-2\cdot 1+4=0 \end{cases}$ não tem solução.

Se $y=2x$, como (x,y,z) é de C, temos $\begin{cases} 4x^2+4y^2-z^2+1=0 \\ 4x-2z+4=0 \end{cases}$

logo $z=2x+2$ e $0=4x^2+4x^2-(2x+2)^2+1=4x^2-8x-3$

Assim, $x=1+\frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $x=1-\frac{\sqrt{7}}{2}$

Temos dois pontos possíveis: $P_1=\left(1+\frac{\sqrt{7}}{2}, 2+\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}\right)$

$P_2=\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}, 2-\sqrt{7}, 4-\sqrt{7}\right)$. Como $f(P_1)=-19-7\sqrt{7}$ e $f(P_2)=-19+6\sqrt{7}$ então P_1 é ponto de mínimo e P_2 é ponto de máximo; $-19-6\sqrt{7}$ é o valor mínimo e

$-19+6\sqrt{7}$ é o valor máximo.

b) Como f é contínua e R é compacto, o problema tem solução. Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo ou de mínimo da restrição de f a R então ocorre um dos casos abaixo:

1º caso: (x_0, y_0, z_0) é ponto do conjunto C do item a). Nesse caso, (x_0, y_0, z_0) é um dos pontos P_1 ou P_2 encontrado em a)

2º caso: (x_0, y_0, z_0) está em R mas não em C. Nesse caso, (x_0, y_0, z_0) é extremo da restrição de f ao conjunto M, onde

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 . \ 0 < z < \frac{2x+y+4}{2},\ 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\right\}.$$

Temos que $M = \{(x,y,z) \in B : g(x,y,z) = 0\}$, onde

$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < z < \frac{2x+y+4}{2}\right\}$, que é aberto e

$g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2 + 1$, que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, sendo (x_0, y_0, z_0) extremo da restrição de f a M, temos $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ paralelo a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e portanto

$$\vec{0} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla g(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8x_0 & 2y_0 & -2z_0 \\ 2 & 1 & -2z_0 \end{vmatrix} =$$

$(-4y_0z_0 + 2z_0)\vec{i} + (16x_0z_0 - 4z_0)\vec{j} + (8x_0 - 4y_0)\vec{k}$. Como (x_0, y_0, z_0) é de M então $z_0 > 0$ e portanto $y_0 = 2x_0$

$y_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{4}$. Como $4x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 + 1 = 0$, temos

$_0 = \sqrt{3/2}$. O único ponto possível é $P_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

ue está em M pois $0 < \sqrt{3/2} < \dfrac{2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4}{2}$

<u>Conclusão</u>: os extremos da restrição de f a R só podem ser P_1 ou P_2 encontrados em a) ou P_3.

Como $f(P_1) = -19 - 6\sqrt{7}$, $f(P_2) = -19 + 6\sqrt{7}$, $f(P_3) = -\frac{1}{2}$

e como $-19 - 6\sqrt{7} < -19 + 6\sqrt{7} < -19 + 18 < -\frac{1}{2}$, então

P_1 é ponto de mínimo, P_3 é ponto de máximo,

$-19 - 6\sqrt{7}$ é valor mínimo de f em R e $-\frac{1}{2}$ é valor máximo de f em R.