a) Como f é contínua e C é compacto, o problema tem solução. Vamos encontrar os pontos de máximo e de mínimo da restrição de f a C, usando o Teorema dos multiplicadores de Lagrange. Para isso, consideremos

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, que é um aberto de $\mathbb{R}^3$,

$g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z^2 + 1$ e $h(x,y,z) = x + 2y - 2z + 4$

que são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos que

$C = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0\}$. Vamos mostrar que $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq \vec{0}$, se (x,y,z) está em C.

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 8y & -2z \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (4z-16y,\ 4x-2z,\ -8y+4x)$$

que é nulo se e só se $z = 4y$ e $x = 2y$. Mas um ponto do tipo $(2y, y, 4y)$ não é de C pois $h(2y,y,4y) \neq 0$.

Como f é de classe C^1, o teorema garante que se (x,y,z) é de máximo ou mínimo da restrição de f a C então existem λ e μ reais tais que

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \beta & (1) \\ 2 = 8\lambda y + 2\beta & (2) \\ -2z = -2\lambda z - 2\beta & (3) \end{cases}$$

De (1) e (2) segue que $0 = 2(2\lambda x + \beta) - (8\lambda y + 2\beta) = 4\lambda(x-2y)$

Se $\lambda = 0$, segue de (1), que $\beta = 1$ e de (3), que $z = 1$. Mas não existem pontos do tipo $(x,y,1)$ em C pois se $0 = g(x,y,1)$ então $x = y = 0$ e $h(0,0,1) \neq 0$

Se $x = 2y$, como (x, y, z) é de C, temos que

$0 = x + 2y - 2z + 4 = 4y + 2z + 4$ e portanto $z = 2y + 2$.

Temos também $0 = x^2 + 4y^2 - z^2 + 1 = 8y^2 - (2y+2)^2 + 1 =$
$= 4y^2 - 8y + 3$ e portanto $y = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $y = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$

Os pontos de extremo da restrição de f a C são
$P_1 = \left(2 + \sqrt{7},\ 1 + \frac{\sqrt{7}}{2},\ 4 + \sqrt{7}\right)$ e $P_2 = \left(2 - \sqrt{7},\ 1 - \frac{\sqrt{7}}{2},\ 4 - \sqrt{7}\right)$.

Como $f(P_1) = -19 - 6\sqrt{7}$ e $f(P_2) = -19 + 6\sqrt{7}$, então
P_1 é o ponto de mínimo, P_2 é o ponto de máximo,
$-19 - 6\sqrt{7}$ é o valor mínimo de f em C e
$-19 + 6\sqrt{7}$ é o valor máximo de f em C

---

b) Como f é contínua e R é compacto, o problema tem solução. Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo ou de mínimo da restrição de f a R então ocorre um dos casos abaixo:

<u>1º caso</u> (x_0, y_0, z_0) é ponto do conjunto C do item a)
Nesse caso, (x_0, y_0, z_0) é um dos pontos P_1 ou P_2 encontrados em a).

$\underline{2^{\circ}\text{ caso}}$ (x_0,y_0,z_0) está em R mas não em C

Nesse caso (x_0,y_0,z_0) é extremo da restrição de f ao conjunto M, onde

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<z<\frac{y+2x+4}{2}\ ,\ x^2+4y^2-z^2+1=0\right\}$$

Temos que $M=\{(x,y,z)\in B:\ g(x,y,z)=0\}$, onde

$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<z<\dfrac{y+2x+4}{2}\right\}$, que é aberto e

$g(x,y,z)=x^2+4y^2-z^2+1$, que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

Temos também que $\nabla g(x,y,z)=(2x,8y,-2z)$, que não é nulo se (x,y,z) é de M. Pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, sendo (x_0,y_0,z_0) extremo da restrição de f a M, existe λ real tal que $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$

isto é: $1=2\lambda x_0$, $2=8\lambda y_0$, $-2z_0=-2\lambda z_0$.

Como (x_0,y_0,z_0) é de M, temos $z_0>0$. Logo $\lambda=1$,

$x_0=\frac{1}{2}$ e $y_0=\frac{1}{4}$. Usando que $x_0^2+4y_0^2+z_0^2+1=0$,

temos $z_0=\sqrt{\frac{3}{2}}$. O único ponto possível é

$P_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, que está em M, pois $0<\sqrt{3/2}<\dfrac{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4}{2}$

<u>Conclusão</u>: os extremos da restrição de f a R só podem ser P_1 ou P_2 encontrados em a) ou P_3 encontrado em b)

Como $f(P_1)=-19-6\sqrt{7}$, $f(P_2)=-19+6\sqrt{7}$ e $f(P_3)=-\frac{1}{2}$

e como $-19-6\sqrt{7}<-19+6\sqrt{7}<-19+18<-\frac{1}{2}$ então

P_1 é ponto de mínimo, P_3 é ponto de máximo,

$-19-6\sqrt{7}$ é valor mínimo de f em R e $-\frac{1}{2}$ é valor máximo de f em R