MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2009

Resolução da Questão 2 da P3

Resolução da Turma B; a da turma A é análoga.

(a) Tem-se, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = xy(1-x^2-4y^2) = xy - x^3y - 4xy^3$. Portanto, f é de classe C^∞ e seu gradiente e matriz hessiana são, respectivamente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = (y - 3x^2y - 4y^3, x - x^3 - 12xy^2)$$
$$\mathsf{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -6xy & 1-3x^2-12y^2 \\ 1-3x^2-12y^2 & -24xy \end{pmatrix}$$

Assim, $\nabla f(x,y) = \mathbb{O}$ se, e somente se, $y(1-3x^2-4y^2) = 0$ e $x(1-x^2-12y^2) = 0$, i.e. se, e somente se, $(x,y) = \mathbb{O}$ ou $(0, \pm\frac{1}{2})$ ou $(\pm 1, 0)$ ou $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4})$; estes são os pontos críticos de f. Calculando-se a matriz hessiana em cada um destes pontos, conclui-se que $\mathbb{O}, (0, \pm\frac{1}{2}), (\pm 1, 0)$ são pontos de sela, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ são pontos de máximo local e $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ são pontos de mínimo local.

(b) Considere a restrição de f a $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \text{ e } x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$. Como $\overline{D}$ é compacto e f é contínua, segue-se do teorema de Weierstrass que f assume máximo em $\overline{D}$. Sejam $\Gamma_1 \doteq \{(x,y) \in \overline{D} \mid y = 0\}$, $\Gamma_2 \doteq \{(x,y) \in \overline{D} \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$ e $\Gamma_3 \doteq \{(x,y) \in \overline{D} \mid x = y\}$. Seja $p_0 \in \overline{D}$ ponto de máximo de f em $\overline{D}$. Se $p_0 \in D = \operatorname{int} \overline{D}$, então segue-se do item anterior que $p_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Como as restrições de f a Γ_1 e a Γ_2 se anulam identicamente e como f assume valores estritamente positivos em D, segue-se que $p_0 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Por outro lado, se $p_0 \in \Gamma_3$, parametrizando-se Γ_3 por $\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [0, \frac{1}{\sqrt{5}}]$, e analisando-se a função derivável $f \circ \gamma : [0, \frac{1}{\sqrt{5}}] \to \mathbb{R}$, conclui-se que $p_0 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$. Como $f(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{1}{20} < \frac{1}{16} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, conclui-se que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é o único ponto de máximo de f em $\overline{D}$. Finalmente, como $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \in D$ e $D \subset \overline{D}$, conclui-se que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é o ponto de máximo de f em D.