B

1. (a) (1,5) Seja $C$ a curva dada pela intersecção das superfícies

$$z = 3 - 3x^2 - y^2 \text{ e } z = x^2 + 2y.$$

Encontre uma parametrização para $C$, ou seja, encontre um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ derivável cuja imagem é $C$.

(b) (1,5) Seja $r$ a reta tangente à intersecção das superfícies

$$xy^3 + x^2y + 3xz - yz^3 = 4 \quad \text{e} \quad xyz - x^2z + z^3 = 1$$

no ponto $(1, 1, 1)$.

A reta $r$ passa ~~passa~~ pelo ponto $(-1, 5, -1)$? Justifique.

(a)

$$\left.\begin{array}{l} z = 3 - 3x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 3x^2 - y^2 = x^2 + 2y \iff$$

$$4x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \iff$$

$$4x^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0 \iff$$

$$4x^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$x^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Note que $\frac{y+1}{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow y = 2\operatorname{sen} t - 1$

Logo podemos tomar: $x(t) = \cos t$

$y(t) = 2\operatorname{sen} t - 1$

$z(t) = x^2(t) + 2y(t) = \cos^2 t + 4\operatorname{sen} t - 2$

Portanto, uma parametrização para $C$ é:

$$\boxed{\gamma(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t - 1, \cos^2 t + 4\operatorname{sen} t - 2), \quad t \in [0, 2\pi]}$$

b)

Seja $r$ a reta tangente as superfícies

$xy^3 + x^2y + 3xz + yz^3 = 4$ e $xyz - x^2z + z^3 = 1$, no ponto $(1,1,1)$.

Define $g(x,y,z) = xy^3 + x^2y + 3xz - yz^3$ e

$h(x,y,z) = xyz - x^2z + z^3$

Logo $\nabla g(x,y,z) = (y^3 + 2xy + 3z,\ 3xy^2 + x^2 - z^3,\ 3x - 3yz^2)$

$\Rightarrow \nabla g(1,1,1) = (6,3,0) = 3(2,1,0)$

$\nabla h(x,y,z) = (yz - 2x,\ xz,\ xy - x^2 + 3z^2)$

$\Rightarrow \nabla h(1,1,1) = (-1,1,3)$

Seja $\vec{v}$ um vetor diretor de $r$. Sabemos que

$\vec{v} \perp \nabla g(1,1,1)$ e $\vec{v} \perp \nabla h(1,1,1)$

Logo $\vec{v} \parallel \nabla g(1,1,1) \wedge \nabla h(1,1,1)$ e portanto $(2,1,0) \wedge \nabla h(1,1,1)$ é um vetor diretor de $r$.

$$(2,1,0) \wedge \nabla h(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{k} + \vec{k} - 6\vec{j} = (3,-6,3) = 3(1,-2,1)$$

Portanto uma equação de $r$ é:

$$X = (1,1,1) + \lambda(1,-2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Fazendo $\lambda = -2$: $X = (1,1,1) + (-2)(1,-2,1) = (-1,5,-1)$.

Então $r$ passa pelo ponto $(-1,5,-1)$.