1. (a) (1,5) Seja C a curva dada pela intersecção das superfícies

$$z = 3 - x^2 - 3y^2 \text{ e } z = 2x + y^2.$$

Encontre uma parametrização para C, ou seja, encontre um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ derivável cuja imagem é C.

(b) (1,5) Seja r a reta tangente à intersecção das superfícies

$$yx^3 + y^2x + 3zy - z^3x = 4 \quad \text{e} \quad xyz - y^2z + z^3 = 1$$

no ponto $(1, 1, 1)$.

A reta r passa pelo ponto $(5, -1, -1)$? Justifique.

(a)

$$\left.\begin{array}{l} z = 3 - x^2 - 3y^2 \\ z = 2x + y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - x^2 - 3y^2 = 2x + y^2 \iff$$

$$x^2 + 2x + 4y^2 - 3 = 0 \iff$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4y^2 - 4 = 0 \iff$$

$$(x+1)^2 + 4y^2 = 4 \iff$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$$

Note que $\dfrac{x+1}{2} = \cos t \Rightarrow x = 2\cos t - 1$

Logo podemos tomar: $x(t) = 2\cos t - 1$

$y(t) = \operatorname{sen} t$

$z(t) = 2x(t) + y^2(t) = 4\cos t - 2 + \operatorname{sen}^2 t$

Portanto, uma parametrização para C é:

$$\boxed{\gamma(t) = (2\cos t - 1,\ \operatorname{sen} t,\ 4\cos t - 2 + \operatorname{sen}^2 t), \quad t \in [0, 2\pi]}$$

b)

Seja r a reta tangente as superfícies.

$$yx^3 + y^2x + 3zy - z^3x = 4 \quad e \quad xyz - y^2x + z^3 = 1, \text{ no ponto } (1,1,$$

Defina: $g(x,y,z) = yx^3 + y^2x + 3zy - z^3x$ e

$h(x,y,z) = xyz - y^2z + z^3$

Logo: $\nabla g(x,y,z) = (3x^2y + y^2 - z^3,\ x^3 + 2yx + 3z,\ 3y - 3z^2x)$

$$\Rightarrow \nabla g(1,1,1) = (3,6,0) = 3(1,2,0)$$

$$\nabla h(x,y,z) = (yz,\ xz - 2yz,\ xy - y^2 + 3z^2)$$

$$\Rightarrow \nabla h(1,1,1) = (1,-1,3)$$

Seja $\vec{v}$ um vetor diretor de r. Sabemos que

$\vec{v} \perp \nabla g(1,1,1)$ e $\vec{v} \perp \nabla h(1,1,1)$.

Logo $\vec{v} \parallel \nabla g(1,1,1) \wedge \nabla h(1,1,1)$ e portanto $(1,2,0) \wedge \nabla h(1,1,1)$

é um vetor diretor de r.

$$(1,2,0) \wedge \nabla h(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{k} - 2\vec{k} - 3\vec{j} =$$
$$= (6,-3,-3) = 3(2,-1,-1).$$

Portanto uma equação de r é:

$$X = (1,1,1) + \lambda(2,-1,-1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $\lambda = 2$: $X = (1,1,1) + 2(2,-1,-1) = (5,-1,-1)$

Então r passa pelo ponto $(5,-1,-1)$.