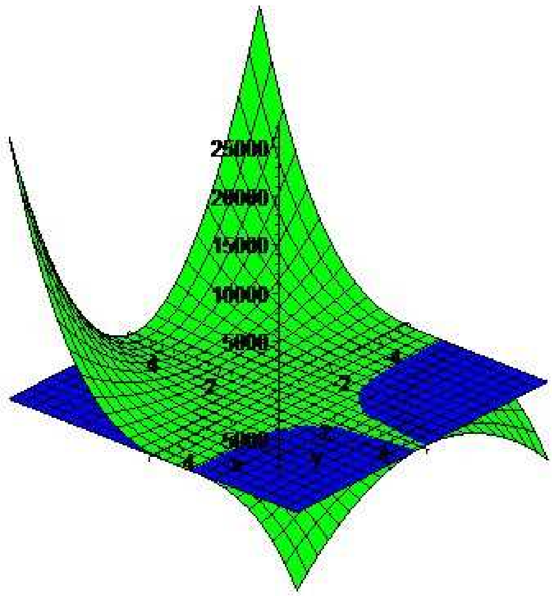
MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2009

Exercício 39 da Lista 3

A função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$ tem um **único** ponto crítico que é o ponto $(0,0)$. De fato, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 15y^2(1+x)^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10y(1+x)^3$. Para que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ temos que ter $y = 0$ ou $x = -1$. Se $x = -1$ então $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,y) = -2 \neq 0$ para todo y. Se $y = 0$ então $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x = 0$, implica que $x = 0$. Assim $(0,0)$ é o **único** ponto crítico de f. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + 30y^2(1+x)$, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$. O hessiano $H(0,0) = 2.10 - 0.0 = 20 > 0$. Assim, $(0,0)$ é um ponto de **mínimo local** de f. Observe que $(0,0)$ **não** é ponto de mínimo **global** de f, pois $f(0,0) = 0$ mas, por exemplo, $f(-2,2) = 4 + 20(-1) = -16 < 0 = f(0,0)$. Veja o gráfico de f e do plano tangente ao gráfico de f em $(0,0,f(0,0))$.



Para um outro exemplo dessa situação veja o site:
http://www.math.tamu.edu/ tom.vogel/gallery/node16.html
Note que no nosso exemplo a função é um polinômio (de grau 5), e no exemplo acima, não é.

Prove agora o seguinte resultado:
Se $f(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Ex + Fy + K$ é um polinômio de **grau 2** *que tem um* **único** *ponto crítico que é um ponto de* **máximo local** (**mínimo local**) *então este ponto é um ponto de* **máximo global** (**mínimo global**) *de f.*