A

4. **(2,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

(I) a imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = \left(t^2 + t + 1, 2t + 3, \dfrac{5t+1}{t^2-1}\right)$ está contida no gráfico de f;

(II) a imagem da curva $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mu(t) = (t^2 + t - 1, t + 2)$ está contida em uma curva de nível de f.

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3, f(1,3))$.

Como $Im\,\gamma \subset G_f$, temos $\dfrac{5t+1}{t^2+1} = f(t^2+t+1, 2t+3)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Em particular, tomando $t=0$, obtemos $f(1,3) = 1$.

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e γ' diferenciável em $\mathbb{R}$, segue pela regra da cadeia que, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} f(t^2+t+1, 2t+3) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2+t+1, 2t+3)\cdot(2t+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2+t+1, 2t+3)\cdot 2 \qquad (1)$$

Por outro lado, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{5t+1}{t^2+1}\right) = \frac{5(t^2+1) - 2t(5t+1)}{(t^2+1)^2} \qquad (2)$$

Igualando (1) e (2) e fazendo $t=0$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 5 \qquad \text{(I)}$$

Como a imagem de μ está contida em uma curva de nível, obtemos, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$f(t^2+t-1, t+2) = f(t^2+t-1, t+2)|_{t=1} = f(1,3)$$
$$= 1 \quad \text{(como visto acima)}.$$

A

Usando novamente a regra da cadeia, obtemos então:

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt} f(t^2+t-1, t+2)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2+t-1, t+2)\cdot(2t+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2+t-1, t+2)\cdot$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 0 \quad \text{II}$$

De II, obtemos $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -3\,\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)$ e,

substituindo em I:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) - 6\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 5 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = -1}$$

e então $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 3}$

A equação do plano tangente ao G_f em $(1,3,f(1,3)) = (1,3,1)$ é, portanto:

$$z-1 = (-1)\cdot(x-1) + 3\cdot(y-3)$$ ou

$$z = 1 - x + 1 - 9 + 3y \Leftrightarrow$$

$$\boxed{z = -x + 3y - 7}$$

4. **(2,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

(I) a imagem da curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = \left(2t+3, t^2+t+1, \dfrac{5t+1}{t^2+1}\right)$ está contida no gráfico de f;

(II) a imagem da curva $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mu(t) = (t+2, t^2+t-1)$ está contida em uma curva de nível de f.

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3,1))$.

Como $\operatorname{Im} \gamma \subset$ Gráfico de f, temos $\dfrac{5t+1}{t^2+1} = f(2t+3, t^2+t+1)$, $\forall t \in$

Em particular, tomando $t=0$, obtemos $f(3,1) = 1$.

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e γ diferenciável em $\mathbb{R}$, segue, pela regra da cadeia, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} f(2t+3, t^2+t+1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2t+3, t^2+t+1) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2t+3, t^2+t+1) \cdot (2t \qquad (1)$$

Por outro lado, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5t+1}{t^2+1}\right) = \dfrac{5(t^2+1) - 2t(5t+1)}{(t^2+1)^2}$ (2)

Igualando (1) e (2) e fazendo $t=0$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) \cdot = 5. \qquad \text{I}$$

Como a imagem de μ está contida em uma curva de nível, segue que

$$f(t+2, t^2+t-1) = f(t+2, t^2+t-1) = f(3,1) = 1$$

(como visto acima)

Usando novamente a regra da cadeia, obtemos B

$$0 = \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt} f(t+2, t^2+t-1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t+2, t^2+t-1) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t+2, t^2+t-1) \cdot (2t+1),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $t = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)3 = 0 \qquad \mathrm{II}$$

De II, obtemos $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -3\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)$ e,

substituindo em I:

$$-6\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 5 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -1$$

e então $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 3$.

A equação do plano tangente ao G_f em $(3, 1, f(3,1)) = (3,1,1)$ é, portanto:

$$z - 1 = 3\cdot(x-3) + (-1)\cdot(y-1) \Leftrightarrow$$

$$z = 1 + 3x - 9 - y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{z = 3x - y - 7}$$