Questão 3) Sejam $f(x,y) = 3xy^2 - 2x^2y$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

(I) $\nabla f(x_0, y_0)$ é tangente à curva $x^3y - xy^3 - 2xy - x^3 + 6 = 0$ no ponto $(2,1)$;

(II) a derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ é igual a $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

Determine todos os pontos (x_0, y_0) para os quais se tem, <u>simultaneamente</u>, as condições (I) e (II) acima satisfeitas.

Solução: Seja $g(x,y) = x^3y - xy^3 - 2xy - x^3 + 6$. Então a curva dada em (I) é a curva de nível 0 de g. Como

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2y - 3x^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2x$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$, temos que $\nabla g(2,1)$ é ortogonal à curva dada em (I) no ponto $(2,1)$. Portanto de (I) temos que

$$\nabla f(x_0, y_0) \bullet \nabla g(2,1) = 0 \, . \tag{1}$$

Notemos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois suas derivadas parciais de primeira ordem são polinômios, e portanto são contínuas em $\mathbb{R}^2$. De f ser diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e de (II), temos que

$$\frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{w} \, . \tag{2}$$

Como

$$\nabla g(2,1) = (12 - 1 - 2 - 12 \, , \, 8 - 6 - 4) = (-3, -2)$$
$$\nabla f(x_0, y_0) = (3y_0^2 - 4x_0y_0 \, , \, 6x_0, y_0 - 2x_0^2 \,) \, ,$$

temos, de (1) e (2), que $-9y_0^2 + 12x_0y_0 - 12x_0y_0 + 4x_0^2 = 0$ e $3y_0^2 - 4x_0y_0 + 6x_0y_0 - 2x_0^2 = 9$. Da primeira equação temos que $x_0 = \frac{3y_0}{2}$ ou $x_0 = \frac{-3y_0}{2}$. Da segunda equação temos que $2x_0^2 = 3y_0^2 + 2x_0y_0 - 9$.

Para $x_0 = \frac{3y_0}{2}$ temos $\frac{9y_0^2}{2} = 3y_0^2 + 3y_0^2 - 9$, e assim $y_0 = \sqrt{6}$ ou $y_0 = -\sqrt{6}$.

Para $x_0 = \frac{-3y_0}{2}$ temos $\frac{9y_0^2}{2} = 3y_0^2 - 3y_0^2 - 9$, que não tem solução real.

Os pontos procurados são: $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} \, , \, \sqrt{6}\right)$ e $\left(\frac{-3\sqrt{6}}{2} \, , \, -\sqrt{6}\right)$.