Questão 3) Sejam $f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2$ e $(x_0, y_0) \in I\!R^2$ tais que:

(I) $\nabla f(x_0, y_0)$ é tangente à curva $xy^3 - x^3y - 2xy - y^3 + 6 = 0$ no ponto $(1,2)$;

(II) a derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ é igual a $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

Determine todos os pontos (x_0, y_0) para os quais se tem, simultaneamente, as condições (I) e (II) acima satisfeitas.

Solução: Seja $g(x,y) = xy^3 - x^3y - 2xy - y^3 + 6$. Então a curva dada em (I) é a curva de nível 0 de g. Como

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y^3 - 3x^2y - 2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 2x - 3y^2$$

são contínuas em $I\!R^2$, temos que $\nabla g(1,2)$ é ortogonal à curva dada em (I) no ponto $(1,2)$. Portanto de (I) temos que

$$\nabla f(x_0, y_0) \bullet \nabla g(1,2) = 0 \,. \tag{1}$$

Notemos que f é diferenciável em $I\!R^2$ pois suas derivadas parciais de primeira ordem são polinômios, e portanto são contínuas em $I\!R^2$. De f ser diferenciável em $I\!R^2$ e de (II), temos que

$$\frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{w}\,. \tag{2}$$

Como

$$\nabla g(1,2) = (8 - 6 - 4\,,\, 12 - 1 - 2 - 12) = (-2, -3)$$
$$\nabla f(x_0, y_0) = (\, 6x_0y_0 - 2y_0^2\,,\, 3x_0^2 - 4x_0y_0\,)\,,$$

temos, de (1) e (2), que $-12x_0y_0 + 4y_0^2 - 9x_0^2 + 12x_0y_0 = 0$ e $6x_0y_0 - 2y_0^2 + 3x_0^2 - 4x_0y_0 = 9$. Da primeira equação temos que $x_0 = \frac{2y_0}{3}$ ou $x_0 = \frac{-2y_0}{3}$. Da segunda equação temos que $3x_0^2 = 2y_0^2 - 2x_0y_0 + 9$.

Para $x_0 = \frac{2y_0}{3}$ temos $\frac{4y_0^2}{3} = 2y_0^2 - \frac{4y_0^2}{3} + 9$, e assim $y_0 = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ou $y_0 = -\sqrt{\frac{27}{2}} = -\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Para $x_0 = \frac{-2y_0}{3}$ temos $\frac{4y_0^2}{3} = 2y_0^2 + \frac{4y_0^2}{3} + 9$, que não tem solução real.

Os pontos procurados são: $\left(\sqrt{6}\,,\, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{6}\,,\, \frac{-3\sqrt{6}}{2}\right)$.