1. **(2,5)** Seja $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}$.

   (a) Se $x_0y_0 \neq 0$, é f diferenciável em (x_0,y_0)? Por que?

   (b) É f diferenciável em $(0,0)$?

   (c) Existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$? Existe $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$?

   (d) Determine o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f não é diferenciável. Justifique.

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{5}(xy)^{-\frac{4}{5}}y(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}} + (xy)^{\frac{1}{5}}\frac{3}{10}(x^2+y^2)^{-\frac{7}{10}}2x$$
$$= \frac{1}{5}\frac{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{x(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{10}}}$$

desde que $xy \neq 0$ (para que os denominadores sejam não nulos).

Como a função f é simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$) temos, para $xy \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) == \frac{1}{5}\frac{x(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{y(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{10}}}.$$

Assim, se (x_0,y_0) é tal que $x_0y_0 \neq 0$, as derivadas parcias de f existem em uma vizinhança de (x_0,y_0) (pois $x_0y_0 \neq 0$ implica que $xy \neq 0$ em uma vizinhança de (x_0,y_0)) e são contínuas em (x_0,y_0). Logo f é diferenciável em (x_0,y_0).

(b) As derivadas parciais de f em $(0,0)$ são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Para ver se f é diferenciável em $(0,0)$, usaremos a definição de diferenciabilidade. Seja

$$E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}.$$

Mas, para que f seja diferenciável em $(0,0)$ é preciso que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

o que não ocorre nesse caso, pois se

$$\phi(x,y) = \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(xy)^{\frac{1}{5}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt[5]{\frac{xy}{x^2+y^2}}$$

e $\gamma(t) = (t,t)$, então

$$\lim_{t\to 0} \phi(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \sqrt[5]{\frac{t^2}{2t^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0,$$

pois exibimos um caminho que passa pela origem e pelo qual o limite não é igual a 0 (na verdade esse limite não existe, mas aqui, basta provar que ele é $\neq 0$). Portanto f **não** é diferenciável em $(0,0)$.

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{5}}(x^2+1)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = +\infty,$$

já que quando $x \to 0$, $(x^2+1)^{\frac{3}{10}} \to 1$ e $x^{\frac{4}{5}} \to 0$ e é positivo. Logo, não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ não existe, pois

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(1,y)-f(1,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{\frac{1}{5}}(y^2+1)^{\frac{3}{10}}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2+1)^{\frac{3}{10}}}{y^{\frac{4}{5}}} = +\infty.$$

(d) f **não** é diferenciável em $(0,0)$ por (b).

Assim como vimos em (c), a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe nos pontos da forma

$(0, a)$ com $a \neq 0$ e a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não existe nos pontos da forma $(a, 0)$ com $a \neq 0$, pois se $a \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, a) - f(0, a)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} x^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = \pm\infty,$$

conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, 0)$ é totalmente análogo.

Conclusão: f não é diferenciável nos pontos dos eixos x e y.