

1. (2,5) Seja $f(x, y) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{10}}$.

(a) Se $x_0 y_0 \neq 0$, é f diferenciável em (x_0, y_0) ? Por que?

(b) É f diferenciável em $(0, 0)$?

(c) Existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$? Existe $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$?

(d) Determine o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^2 onde f não é diferenciável. Justifique.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{5}(xy)^{-\frac{4}{5}}y(x^2 + y^2)^{\frac{3}{10}} + (xy)^{\frac{1}{5}}\frac{3}{10}(x^2 + y^2)^{-\frac{7}{10}}2x \\ &= \frac{1}{5}\frac{y(x^2 + y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{x(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2 + y^2)^{\frac{7}{10}}}\end{aligned}$$

desde que $xy \neq 0$ (para que os denominadores sejam não nulos).

Como a função f é simétrica ($f(x, y) = f(y, x)$) temos, para $xy \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{5}\frac{x(x^2 + y^2)^{\frac{3}{10}}}{(xy)^{\frac{4}{5}}} + \frac{3}{5}\frac{y(xy)^{\frac{1}{5}}}{(x^2 + y^2)^{\frac{7}{10}}}.$$

Assim, se (x_0, y_0) é tal que $x_0 y_0 \neq 0$, as derivadas parciais de f existem em uma vizinhança de (x_0, y_0) (pois $x_0 y_0 \neq 0$ implica que $xy \neq 0$ em uma vizinhança de (x_0, y_0)) e são contínuas em (x_0, y_0) . Logo f é diferenciável em (x_0, y_0) .

(b) As derivadas parciais de f em $(0, 0)$ são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Para ver se f é diferenciável em $(0, 0)$, usaremos a definição de diferenciabilidade. Seja

$$E(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) = (xy)^{\frac{1}{5}}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{10}}.$$

Mas, para que f seja diferenciável em $(0,0)$ é preciso que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

o que não ocorre nesse caso, pois se

$$\phi(x,y) = \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(xy)^{\frac{1}{5}}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{10}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt[5]{\frac{xy}{x^2 + y^2}}$$

e $\gamma(t) = (t,t)$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[5]{\frac{t^2}{2t^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0,$$

pois exibimos um caminho que passa pela origem e pelo qual o limite não é igual a 0 (na verdade esse limite não existe, mas aqui, basta provar que ele é $\neq 0$). Portanto f **não** é diferenciável em $(0,0)$.

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,1) - f(0,1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{5}}(x^2 + 1)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = +\infty,$$

já que quando $x \rightarrow 0$, $(x^2 + 1)^{\frac{3}{10}} \rightarrow 1$ e $x^{\frac{4}{5}} \rightarrow 0$ e é positivo. Logo, não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ não existe, pois

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(1,y) - f(1,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{\frac{1}{5}}(y^2 + 1)^{\frac{3}{10}}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2 + 1)^{\frac{3}{10}}}{y^{\frac{4}{5}}} = +\infty.$$

(d) f **não** é diferenciável em $(0,0)$ por (b).

Assim como vimos em (c), a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe nos pontos da forma

$(0, a)$ com $a \neq 0$ e a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ não existe nos pontos da forma $(a, 0)$

com $a \neq 0$, pois se $a \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, a) - f(0, a)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} x^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\frac{1}{5}} (x^2 + a^2)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{4}{5}}} = \pm\infty,$$

conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Para $\frac{\partial f}{\partial y}(a, 0)$ é totalmente análogo.

Conclusão: f não é diferenciável nos pontos dos eixos x e y .