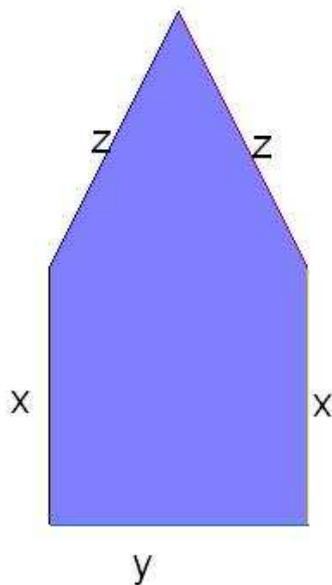


Exercício 29 da Lista 3

Problema: Queremos construir um pentágono, como na figura abaixo, com perímetro igual a 12 e de modo que sua área seja máxima.



A área de tal pentágono é

$$A(x, y, z) = xy + y \frac{\sqrt{4z^2 - y^2}}{4}.$$

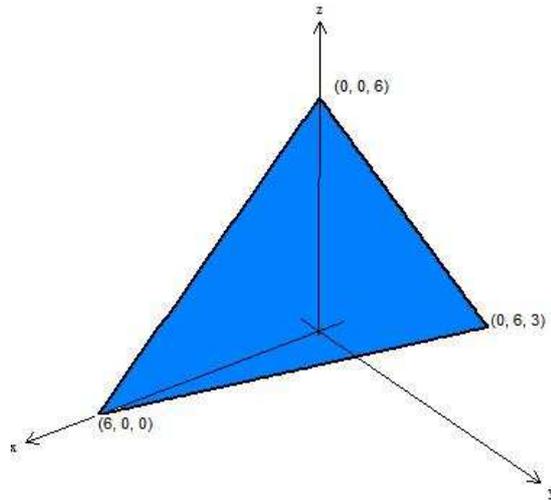
Para formar o pentágono temos que ter $x > 0$, $y > 0$ e a altura do triângulo $h = \frac{\sqrt{4z^2 - y^2}}{2} > 0$, o que implica que $z > \frac{y}{2}$. Seja

$$\mathbf{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0 \text{ e } z > \frac{y}{2}\}.$$

e

$$\mathbf{B} = \{(x, y, z) \in \mathbf{A} \mid 2x + y + 2z = 12\}.$$

Queremos então encontrar o máximo de $A(x, y, z)$ no conjunto \mathbf{B} . O conjunto \mathbf{B} é o triângulo da figura abaixo, mas **sem incluir** sua “borda”, isto é, os segmentos de reta que unem os pontos $(6, 0, 0)$ a $(0, 0, 6)$, $(0, 0, 6)$ a $(0, 6, 3)$ e $(0, 6, 3)$ a $(6, 0, 0)$. O conjunto \mathbf{B} não é fechado.



Para ver que o problema tem solução consideramos o conjunto **compacto** \mathbf{K} formado pela união do conjunto \mathbf{B} com sua “borda”, isto é,

$$\mathbf{K} = \{(x, y, z) \in \mathbf{A} \mid 2x + y + 2z = 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq \frac{y}{2}\}.$$

Como a função $A(x, y, z)$ é contínua em \mathbf{K} , pelo Teorema de Weierstrass, A tem máximo e mínimo em \mathbf{K} . Analisaremos a função $A(x, y, z)$ na “borda” de \mathbf{K} .

1. $y = 0$

Nesse caso $A(x, 0, z) = 0$ para todo x e z .

2. $y = 2z$ ou $z = \frac{y}{2}$. Nesse caso não se constrói o triângulo e o problema é construir o retângulo de área máxima com perímetro igual a 12.

De fato, $A(x, y, \frac{y}{2}) = xy$, e a condição é $2x + 2y = 12$.

Este é um problema de Cálculo I. Resolva! A resposta é $x = y = 3$ e então a área máxima é igual a 9.

3. $x = 0$. Observe que nesse caso constrói-se apenas o triângulo. O problema é então determinar o triângulo de área máxima com perímetro igual a 12.

De fato, $A(0, y, z) = y \frac{\sqrt{4z^2 - y^2}}{4}$ e a condição é $y + 2z = 12$ com $z \geq \frac{y}{2}$. Este é outro problema de Cálculo I. Resolva-o também. O máximo da área ocorre quando $y = z = 4$ e a área é $4\sqrt{3} \approx 6,93$.

Da análise acima vimos que o máximo de A na “borda” de \mathbf{K} é 9.

Finalmente, vamos achar os candidatos a pontos de máximo da função $A(x, y, z)$ no conjunto \mathbf{B} . Estamos dentro das hipóteses do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

Então o ponto de máximo da função A em \mathbf{B} (se existir) tem que ser um ponto (x, y, z) satisfazendo:

“ *Existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla A(x, y, z) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial A}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial A}{\partial z}(x, y, z) \right) = \lambda(2, 1, 2)$$

e

$$2x + y + 2z = 12.”$$

Obtemos assim as equações:

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x, y, z) = y = 2\lambda \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y, z) = x + \frac{1}{4} \left[\sqrt{4z^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{4z^2 - y^2}} \right] = \lambda, \quad (2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}(x, y, z) = \frac{yz}{\sqrt{4z^2 - y^2}} = 2\lambda. \quad (3)$$

Das equações (1) e (3) obtemos que

$$\frac{z}{\sqrt{4z^2 - y^2}} = 1,$$

já que $y \neq 0$, e daí vem que $y^2 = 3z^2$. Substituindo na equação (2), obtemos que

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) z.$$

Agora, substituindo na condição $2x + y + 2z = 12$ obtemos

$$z = 4(2\sqrt{3} - 3), \quad y = 12(2 - \sqrt{3}), \quad x = 2(3 - \sqrt{3}),$$

e nessas condições a área é

$$A = 12(6 - 3\sqrt{3}) \approx 9,64.$$

Conclusão: O valor da área A obtido nessa última etapa é maior do que o valor máximo de A na “borda” de \mathbf{K} , e portanto é o valor máximo da função A em \mathbf{K} . Em particular, ele é o máximo de A em \mathbf{B} . Isto prova que o problema tem solução, que é construir o pentágono com $x = 2(3 - \sqrt{3})$, $y = 12(2 - \sqrt{3})$ e $z = 4(2\sqrt{3} - 3)$.