MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2009

3ª Lista de Exercícios

1-) Descreva as superfícies de nível de:

(a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
(c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ (d) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$

2-) (a) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

3-) Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

4-) Encontre uma parametrização para C e a reta tangente a C no ponto P, onde:

(a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (0, 1, 1)$.

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

5-) Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos, onde:

(a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x,y) = x^3 y$.

(b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x,y,z) = x - z$.

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x,y,z) = xz + y$.

(d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

6-) Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

7-) Mostre que o elipsóide $3x^2+2y^2+z^2=9$ e a esfera $x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24=0$ se tangenciam no ponto $(1,1,2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

8-) Verifique que as superfícies $x^2+y^2-z^2=0$ e $x^2+y^2+z^2=1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.

9-) Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z=x^2+y^2$ e $4x^2+y^2+z^2=9$ no ponto $(-1,1,2)$.

10-) Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2+y^2=2$ com gráfico de $f(x,y)=x^3+y^3+2$ no ponto $(1,1,4)$.

11-) Sejam $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1,0)=(2,1)$ e $\gamma'(t)\neq(0,0,0)$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3+x^3+yz+xy^3=0$. Sabendo que $(1,0,-1)\in Im\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

12-) Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x-1)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}-(z-1)^2=0$ nos pontos $(2,2,2)$ e $(2,2,0)$.

13-) Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
a) $f(x,y,z)=x\mathrm{e}^z+\operatorname{sen}(y)$, $(2,0,0)$ b) $f(x,y,z)=-\dfrac{4}{y}+z\ln(x)$, $(1,2,-1)$

14-) Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z)=5x^2-3xy+xyz$.
(a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\mathrm{v}=\mathrm{i}+\mathrm{j}-\mathrm{k}$.
(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?
(c) Qual é a maior taxa de variação em P?

15-) Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D.)
a) $f(x,y)=5-3x+4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$
b) $f(x,y)=xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 2,\ x\leq 0,\ y\geq 0\}$
c) $f(x,y)=2x^3+y^4$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$
d) $f(x,y)=(4x-x^2)\cos y$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 3,\ -\frac{\pi}{4}\leq y\leq\frac{\pi}{4}\}$

16-) Determine o máximo e o mínimo valores da função f sujeita às restrições explicitadas:
a) $f(x,y)=xy$; $5x^2+5y^2+6xy-64=0$
b) $f(x,y,z)=xyz$; $x^2+2y^2+3z^2=6$
c) $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$; $x^2+y^2+z^2=1$
d) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $x^4+y^4+z^4=1$

17-) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x, y)$ em D sendo:
a) $f(x, y) = xy; \quad D = \{(x, y) \ : \ x^2 - y^2 = 1, \quad x \in [1, 2]\}$
b) $f(x, y) = 2x^3 + y^4; \quad D = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = 1, \quad x \in [0, 1/4], \ y \geq 0\}$
Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver esse exercício?

18-) a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.
b) Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?

19-) Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

20-) Determine a distância entre as retas de equação
$X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5), \quad \alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1, 0, 3) + \mu(-2, 3, 1), \quad \mu \in \mathbb{R}$.

21-) Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

22-) Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma$.

23-) Seja $T(x, y) = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x, y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq -x + 1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima?

24-) Seja $b \in \mathbb{R}^*$ e $f(x, y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.
a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.
b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.

25-) Seja $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.
(a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f.
(b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f?

26-) A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

27-) Considere o seguinte problema: "Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$".
a) Mostre que o problema tem solução.
b) Resolva o problema.

28-) Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C, sem parametrizar C, onde:

(a) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $C = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$.

(b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $C = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$

(c) f e C como no exercício 5.a);

(d) f e C como no exercício 5.b).

Resolva os exercícios 29 a 33, a seguir, assumindo que cada problema proposto tem solução. É possível provar que essas soluções existem. Tente fazê-lo.

29-) Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine aquele que tem área máxima.

30-) Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

31-) Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

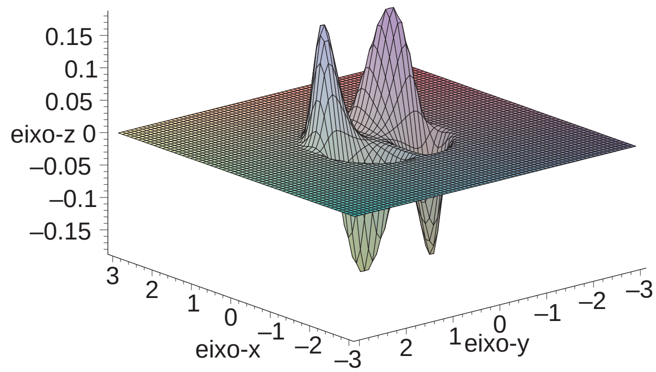
32-) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

33-) Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobre, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

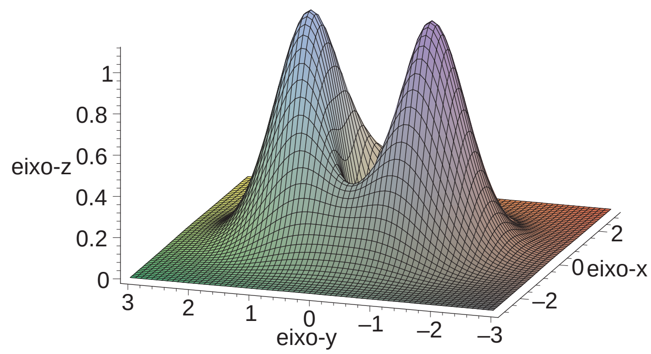
34-) Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
c) $z = x^2y^2$
d) $z = x^3y^3$
e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
f) $z = y\cos x$
g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$
i) $z = xye^{-x^2-y^2}$
j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$

35-) A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x,y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)^4}$.
a) Mostre que há um número infinito de pontos críticos.
b) Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.
c) Classifique os demais pontos críticos.



36-) A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x,y) = (x^2+3y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. Mostre que há 5 pontos críticos e ache os extremos de f.



37-) Determine os valores de a para os quais a função

$$f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

38-) É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x,y) = -(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

39-) Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, polinomial, que só tenha um ponto crítico e este ponto seja mínimo local sem ser mínimo global? Analise a função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$. Você é capaz de esboçar o gráfico?

40-) [Método dos Mínimos Quadrados] Sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leqslant i \leqslant n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, é, em geral, sobredeterminado se $n \geqslant 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, i.e. que minimize a soma dos quadrados dos erros $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E(a,b) \doteq \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$. Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.

41-) Seja $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x) = \langle T(x), x\rangle$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um operador simétrico. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \langle x, x\rangle$, de modo que a superfície de nível 1 de g coincide com a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^3$, denotada, doravante, por S. Mostre que: (i) Q tem pontos de máximo e mínimo em S; (ii) todos os pontos de máximo e de mínimo de Q em S são auto-vetores de T; (iii) os valores máximo e mínimo de Q em S são, respectivamente, o maior e o menor auto-valor de T. Generalize esta proposição para formas quadráticas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (dado $n \in \mathbb{N}$).

Algumas aplicações deste exercício: (i) na *Mecânica dos Meios Contínuos*, as chamadas *tensões principais* em um ponto (i.e. os auto-valores do tensor das tensões) são tais que a maior tensão principal é a tensão normal máxima e a menor tensão principal é a tensão normal mínima no ponto em questão; (ii) analogamente, os momentos principais de inércia de um corpo rígido (i.e. os auto-valores do tensor de inércia) com relação a um dado ponto de referência são tais que o maior momento principal corresponde ao momento de inércia máximo e o menor momento principal corresponde ao momento de inércia mínimo em relação a eixos que passam pelo ponto em questão.

42-) [Exercício de Álgebra Linear] Use o exercício anterior para mostrar que todo operador simétrico $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ admite uma base ortonormal que o diagonaliza. Generalize e demonstre esta proposição para operadores simétricos $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (dado $n \in \mathbb{N}$).

43-) Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x - x_0\|$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. Mostre que f é derivável no complementar de $\{x_0\}$ e que, $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$, $\nabla f(x) = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$. Generalize e demonstre esta proposição para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida pela mesma fórmula (dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$).

44-) Sejam $X \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $g : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$ tal que o gradiente de g é não-nulo em todos os pontos da superfície de nível c de g (diz-se que um tal c é *valor regular* de g), denotada, doravante, por S. Sejam $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^3$ tais que $x_0 \neq x_1$, $x_0 \notin S$ e $x_1 \notin S$, e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x - x_0\| + \|x - x_1\|$.

1. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0, x_1\}$ e calcule o seu campo gradiente.

2. Aplique o item anterior e o teorema dos multiplicadores de Lagrange para concluir que, se $x_2 \in S$ for ponto crítico da restrição de f a S, então os segmentos $[x_0, x_2]$, $[x_1, x_2]$ e a reta normal a S em x_2 são coplanares, e os ângulos formados por estes segmentos com a normal são congruentes.

3. Generalize e demonstre os dois ítens anteriores para o caso em que X é um aberto de $\mathbb{R}^n$, dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, $g : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1, c valor regular de g, S superfície de nível c de g, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ fora de S e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida pela mesma fórmula. Em particular, para $n = 2$, isto prova a *propriedade reflexiva* das elipses: se x_0 e x_1 forem os focos de uma elipse S, então $\|x - x_0\| + \|x - x_1\|$ é constante em S, logo todo ponto de S é ponto de mínimo da restrição de f a S, o que implica que, para todo $x \in S$, os segmentos que ligam x aos focos da elipse formam com a normal a S em x ângulos congruentes; noutras palavras, se um raio de luz for emitido por um dos focos e se refletir na elipse, o raio refletido passará pelo outro foco. Esta propriedade é explorada, por exemplo, na construção de "*whisper chambers*" e de refletores elipsoidais, usados em teatros.

RESPOSTAS

1. (a) família de planos paralelos; (b) família de elipsóides com centro em $(0,0,0)$; (c) família de hiperbolóides de uma ou duas folhas; (d) família de cilindros hiperbólicos.

2. (a) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\cos 2t), t \in [0, 2\pi]$. (b) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t - 1, \operatorname{sen} t - 1), t \in [0, 2\pi]$.

3. $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

5. (a) pontos de máximo: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$; pontos de mínimo: $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$. (b) ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}})$; ponto de mínimo: $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}})$. (c) ponto de máximo: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$; ponto de mínimo: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$. (d) ponto de mínimo: $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$; não tem ponto de máximo.

9. $(5, 8, 6)$.

10. $X = (1,1,4) + \lambda(-1,1,0), \lambda \in \mathbb{R}$.

11. $X = (1,0,-1) + \lambda(2,-9,-5), \lambda \in \mathbb{R}$.

12. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$

13. a) $\sqrt{6}$; $(1,1,2)$ b) $\sqrt{2}$; $(-1,1,0)$.

14. a) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ b) $(38, 6, 12)$ c) $2\sqrt{406}$.

15. a) máximo: $f(4,5) = 13$, mínimo: $f(4,0) = -7$; b) máximo: $f(0,0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$; c) máximo: $f(1,0) = 2$, mínimo: $f(-1,0) = -2$; d) máximo: $f(2,0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. a) máx $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$; mín $f(4,-4) = f(-4,4) = -16$; b) máx $2/\sqrt{3}$, mín $-2/\sqrt{3}$; c) máx $1/27$, mín 0; d) máx $\sqrt{3}$, mín 1.

17. a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; b) mínimo: $\frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo 1.

18. (a) $(1,1)$ e $(-1,-1)$; (b) $(0,-1,2)$.

19. $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{100}{3}$.

20. $\sqrt{12}$.

21. $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$.

22. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

23. ponto de máximo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; não há ponto de mínimo.

24. a) Se $b > 0$, temos 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1\right)$ e $(0,-2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ máx. local e $(0,2)$ mín. local; e se $b < 0$, temos 3 pontos críticos: $(0,0)$ e $(0,2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ mín. local.

b) Pontos de máx: $(-3,3)$ e $(3,3)$; ponto de mín. $(0,2)$.

26. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0,0)$ é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: $(0,0)$ é ponto de máximo global.

26. Mais quentes: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$; Mais frios : $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

27. O paralelepípedo tem vértices em $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, \pm 1, 2)$.

28. (a) pontos de mínimo: $(0,1,-2)$ e $(1,0,-2)$; ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$. (b) pontos de mínimo: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; pontos de máximo: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$.

29. $12(2-\sqrt{3}),\ 2(3-\sqrt{3}),\ 4(2\sqrt{3}-3)$

30. $x + y + 2z - 6 = 0$

31. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
$2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.

32. base 3×3cm, altura 1,5cm.

33. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.

34. a) $(-3, 2)$ mínimo; b) $(2/3, 1)$, $(-4/3, -1)$ selas; c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) $(4, 4)$ máximo; f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; g) $(1, 1)$ máximo, $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$ selas; h) $(0, 0)$ máximo, $(0, 2)$ mínimo, $(0, -2), (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1)$ selas; i) $(0, 0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; j) $(1/3, 0)$ mínimo; k) $(2, 1)$ e $(0, 3)$ sela; $(2, 3)$ mínimo e $(0, 1)$ máximo.

35. a) $(a, 0)$ é ponto crítico $\forall a \in \mathbb{R}$. b) $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8}), \pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$.

36. mínimo $f(0, 0) = 0$; máximo $f(0, \pm 1) = 3\mathrm{e}^{-1}$

37. a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) não d) $a = 0$.