MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$1^{\underline{a}}$ lista de exercícios - 2009

POLINÔMIO DE TAYLOR

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

   (a) $\sqrt[3]{8,2}$

   (b) $\ln(1,3)$

   (c) $\operatorname{sen}(0,1)$

2. Mostre que:

   (a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \frac{1}{3!}|x|^3 \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$

   (b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) < \frac{1}{2}x^3 \ , \ \forall\, x \in [0,1]\,.$

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. (a) Seja n um número natural ímpar. Mostre que

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \quad , \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Avalie sen 1 com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

5. (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

   (b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5}.

   (c) Mostre que

$$\left|e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \leq \frac{e^{x^2}x^{2n+2}}{(n+1)!} \quad , \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   (d) Avalie $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Mostre que $\left|\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!}\right)\right| \leq \frac{1}{15.7!}$

7. Seja $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \ln x$ em torno de $x_0 = 1$. Mostre que

$$|\ln x - P_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1} \quad , \ \forall\, x \in]1, +\infty[$$

   e avalie $\ln(1,01)$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

8. Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = e^x \cos x$ em torno de $x_0 = 0$ e mostre que

$$\left| e^{x^2} \cos(x^2) - \left(1 + x^2 - \frac{x^6}{3}\right) \right| \leq \frac{x^8}{2} \quad , \ \forall \ x \in [-1,1] \, .$$

9. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f é derivável até $2^{\underline{a}}$ ordem em I e f'' é contínua no ponto a. Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o "teste da segunda derivada", isto é, prove as seguintes afirmações:

   (a) Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, então a é um ponto de mínimo local de f.

   (b) Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, então a é um ponto de máximo local de f.

10. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

    (a) Determine o Polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$.

    (b) Usando (a), encontre um valor aproximado para $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^{\frac{11}{4}}}$ dx e mostre que o erro cometido é menor do que 10^{-4}.

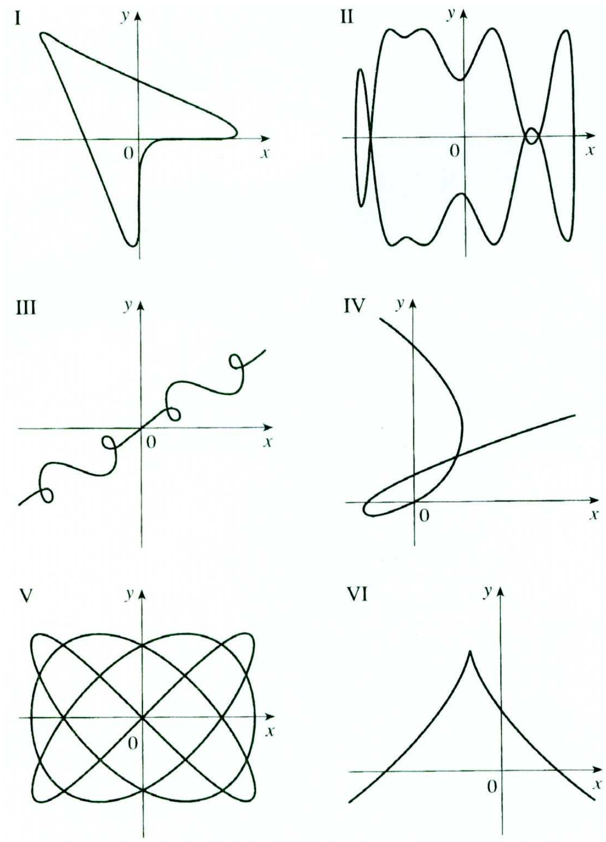
CURVAS E SUPERFÍCIES

11. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

    (a) $\gamma(t) = (1, t)$
    (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
    (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$
    (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$
    (e)$\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$
    (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$
    (g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
    (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$

12. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

    (a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$
    (b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$
    (c) $x = \operatorname{sen}(3t), \quad y = \operatorname{sen}(4t)$
    (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t), \quad y = t + \operatorname{sen}(3t)$
    (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), \quad y = \cos(t + \cos t)$
    (f) $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$

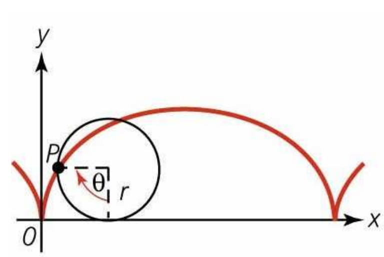


13. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

14. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\,,\ \text{sen}\ t \cos\ t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações.

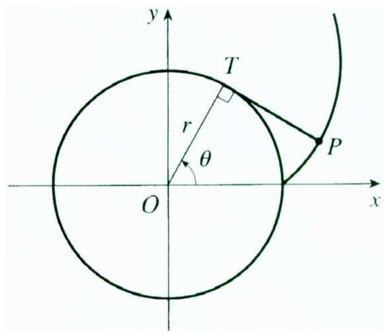
15. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

16. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo dos x. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente na origem. (Esta curva é chamada ciclóide; ver figura.)



17. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



18. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ (b) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^x}$

(e) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x - y)$ (f) $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$

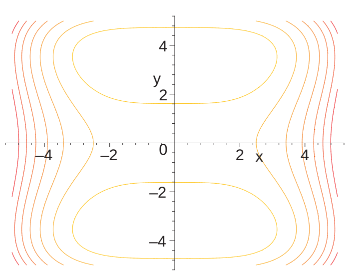
(g) $f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

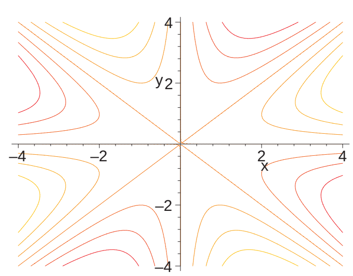
19. Esboce uma família de curvas de nível de:

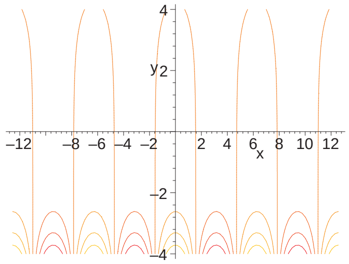
(a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ (b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

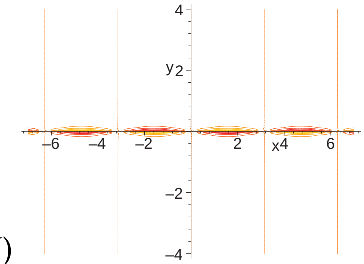
20. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.

(I) 

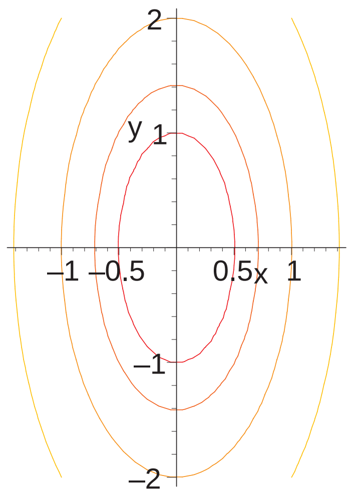
(II) 



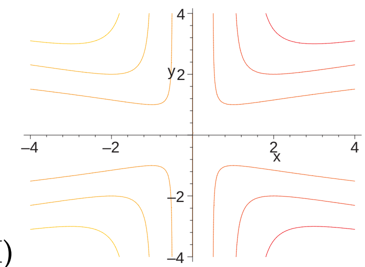
(III)



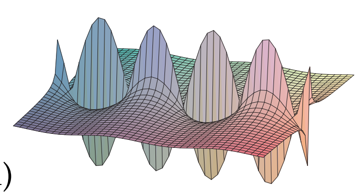
(IV)



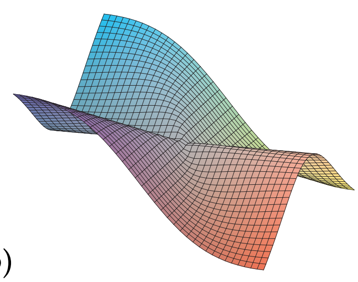
(V)



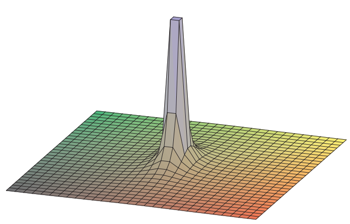
(VI)



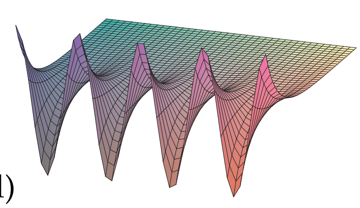
(a)



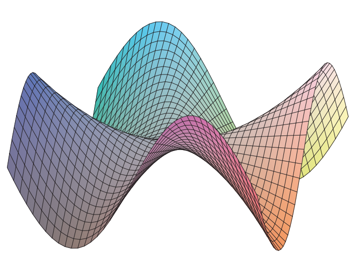
(b)



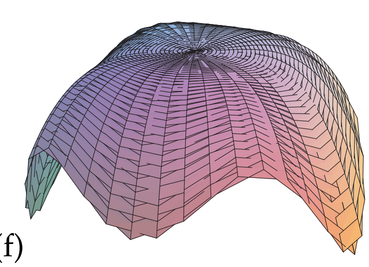
(c)



(d)



(e)



(f)

21. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$
(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$
(m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2 + y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$
(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

22. Seja $\gamma(t) = (e^{t+1}, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

(a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

(b) A imagem de γ está contida na curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

23. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:
(a) $z + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 +^3 z^2 = 1$
(c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
(e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
(g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

24. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

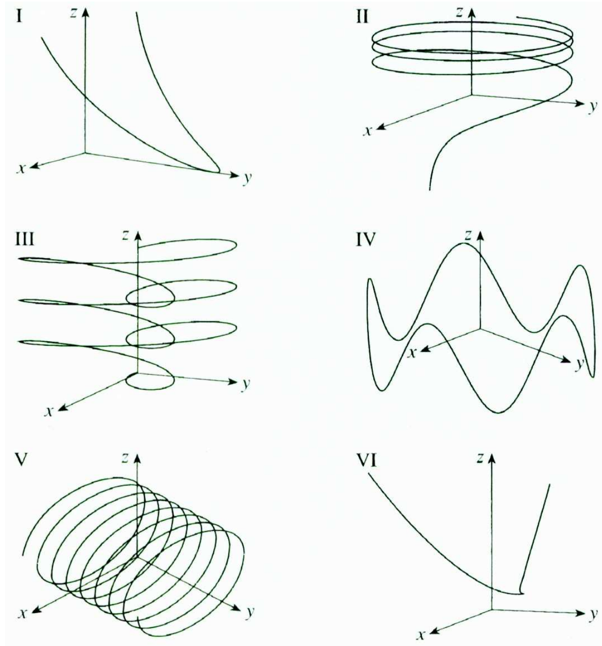
(a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
(c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t}),\ t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t),\ t \geq 0$
(e) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

25. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t) = (t\ \cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$.
(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.
(b) Faça um esboço da imagem de γ.

26. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0,\pi]$, está contida numa esfera com centro em $(0,0,0)$ e esboce a imagem de γ.

27. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$
(c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t\ \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t, t)$
(e) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$



28. Encontre uma parametrização para a curva de nível do nível k de f nos casos:

    (a) $f(x,y) = x + 2y - 3, \quad k = -2;$

    (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}, \quad k = 5;$

    (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}, \quad k = 1.$

    Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

LIMITES E CONTINUIDADE

29. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

    (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

    (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

    (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

    (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$

    (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

    (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

    (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4 + x^2 y + y^2}$

    (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$

    (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

    (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

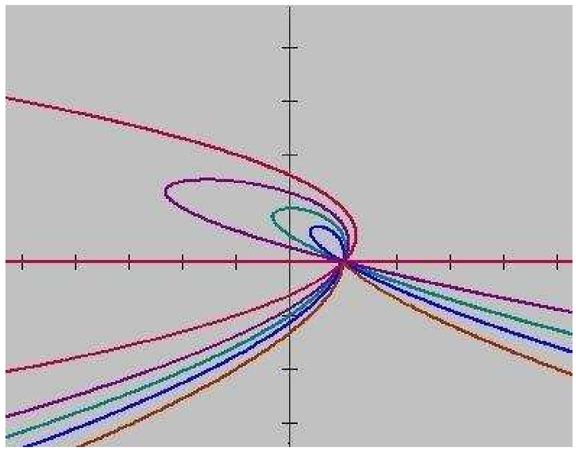
    (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y + y^4 + x^4}{x^3 y - x y^3}$

    (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{y^4 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}$

30. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

31. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



32. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

RESPOSTAS

13. Não. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

14. $y = x$ e $y = -x$.

18. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq x\}$

(b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$

(c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$

(d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$

(e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(f) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x(y - x)(y + x) > 0\}$

(g) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x^2 + y^2 < 16\}$

22. (b) Sim, no nível 5.

23. Apenas a superfície do item (a).

29. (a) não existe (b) 0 (c) 0

(d) não existe (e) não existe (f) não existe

(g) não existe (h) 0 (i) 0 (j) 0

(k) não existe (l) 1

30. (a) 1 (b) 0

32. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$