Questão 2. Seja $f(x,y) = \dfrac{3x^2+5y^2}{x^2+y^2+2}$.

a) (1 ponto) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c=1$, $c=3$ e $c=4$.

b) (0,5 ponto) Encontre uma função γ derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c=1$.

c) (0,5 ponto) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

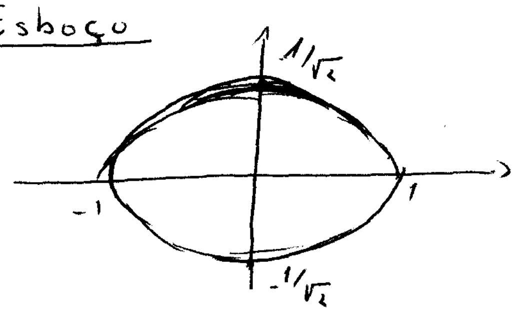
d) (1 ponto) Seja $\Gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

(a) · $\underline{c=1}$:

$$f(x,y)=1 \iff \frac{3x^2+5y^2}{x^2+y^2+2} = 1 \iff 3x^2+5y^2 = x^2+y^2+2 \iff 2x^2+4y^2 = 2 \iff x^2+2y^2 = 1$$

Logo a curva de nível $f(x,y)=1$ é a elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{1/2} = 1$

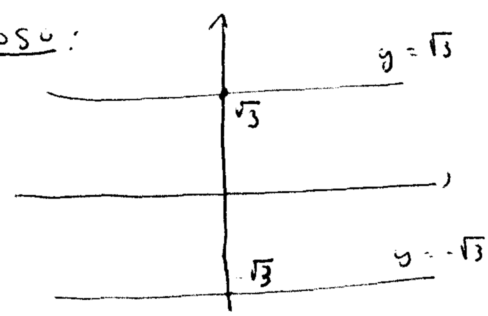
Esboço



· $\underline{c=3}$: $f(x,y)=3 \iff \cancel{3x^2}+5y^2 = \cancel{3x^2}+3y^2+6 \iff 2y^2 = 6 \iff y^2 = 3 \iff y=\sqrt{3}$ ou $y=-\sqrt{3}$

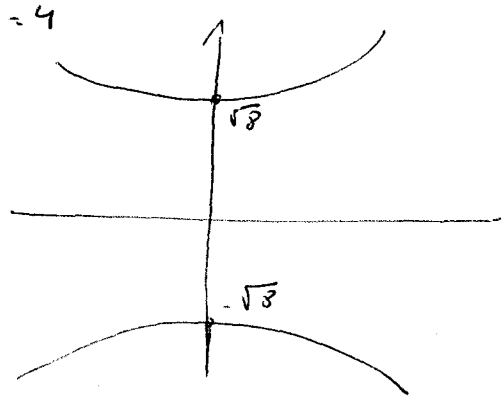
Logo a curva de nível $f(x,y)=3$ são as retas $y=\sqrt{3}$ e $y=-\sqrt{3}$

Esboço:



· $\underline{c=4}$: $f(x,y)=4 \iff 3x^2+5y^2 = 4x^2+4y^2+8 \iff -x^2+y^2 = 8$

Logo a curva de nível $f(x,y)=4$ é a hipérbole $-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{8} = 1$



B

Se $c=1$ a curva de nível $f(x,y)=c$ é a elipse

$+ 2y^2 = 1$.

Defina então $\boxed{\gamma(t) = \left(\text{sen}\, t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in [0, 2\pi]}$

Note que γ é derivável e que $(x(t))^2 + 2(y(t))^2 = \text{sen}^2 t + \cancel{2}\frac{\cos^2 t}{\cancel{2}} = 1$

Por (b), $\gamma(t) = \left(\text{sen}\, t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)$

$\gamma(t) = (-1,0) \iff \left(\text{sen}\, t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right) = (-1,0) \overset{t \in [0,2\pi)}{\iff} t = \frac{3\pi}{2}$

Logo o vetor pedido é $\gamma'(3\pi/2)$

$\gamma'(t) = \left(\cos t, -\frac{\text{sen}\, t}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma'(3\pi/2) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$\Gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\Gamma(t) = (\text{sen}\, t, \cos t, z(t))$.

Como a imagem de γ está contida no gráfico de f,

$z(t) = f(x(t), y(t)) = \frac{3\,\text{sen}^2 t + 5\cos^2 t}{\text{sen}^2 t + \cos^2 t + 2} = \frac{3 + 2\cos^2 t}{3} = 1 + \frac{2}{3}\cos^2 t$

Logo $\Gamma(t) = \left(\text{sen}\, t, \cos t, 1 + \frac{2}{3}\cos^2 t\right)$

$\therefore \quad \Gamma'(t) = \left(\cos t, -\text{sen}\, t, -\frac{4}{3}\cos t\, \text{sen}\, t\right)$

O vetor tangente a Γ em $\Gamma(\pi/3)$ é então

$\Gamma'(\pi/3) = \left(1/2, -\sqrt{3}/2, -\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$

$\therefore \boxed{\Gamma'(\pi/3) = \left(1/2, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/3\right)}$