Questão 2. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

a) (1 ponto) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c=1$, $c=2$ e $c=3$.

b) (0,5 ponto) Encontre uma função γ derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c=1$.

c) (0,5 ponto) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

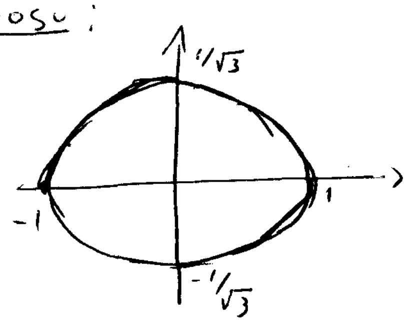
d) (1 ponto) Seja $\Gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

(a). $\underline{c=1}$:

$$f(x,y) = 1 \iff \frac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1} = 1 \iff 2x^2+4y^2 = x^2+y^2+1 \iff x^2+3y^2 = 1$$

Logo a curva de nível $f(x,y)=1$ é a elipse $\boxed{x^2 + \dfrac{y^2}{1/3} = 1}$

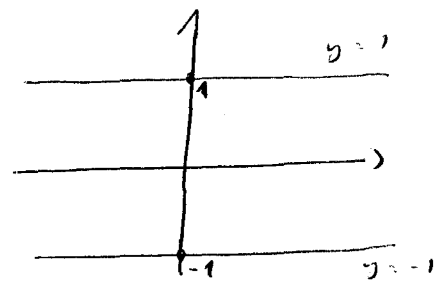
Esboço:



• $\underline{c=2}$: $f(x,y) = 2 \iff \cancel{2x^2} + 4y^2 = \cancel{2x^2} + 2y^2 + 2 \iff y^2 = 1 \iff y=1$ ou $y=-1$

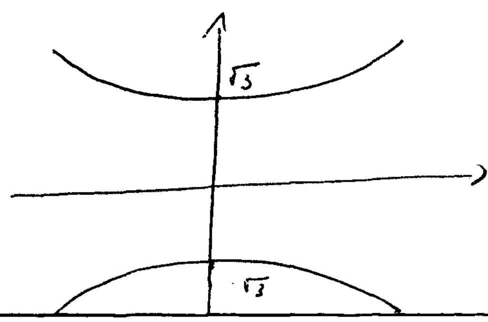
Logo a curva de nível $f(x,y)=2$ são as retas $y=1$ e $y=-1$

Esboço:



• $\underline{c=3}$: $f(x,y) = 3 \iff 2x^2+4y^2 = 3x^2+3y^2+3 \iff -x^2+y^2 = 3$

Logo a curva de nível $f(x,y)=3$ é a hipérbole $\dfrac{-x^2}{3} + \dfrac{y^2}{3} = 1$



A

(b) Se $c=1$ a curva de nível $f(x,y)=c$ é a elipse

$x^2+3y^2=1$

Defina então $\boxed{\gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right), \quad t \in [0, 2\pi]}$

Note que γ é derivável e que $(x(t))^2 + 3(y(t))^2 = \operatorname{sen}^2 t + 3\frac{\cos^2 t}{3} = 1$

(c) Por (b), $\gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)$

$t \in [0, 2\pi]$

$\gamma(t) = (-1, 0) \iff \left(\operatorname{sen} t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right) = (-1, 0) \iff t = \frac{3\pi}{2}$

Logo o vetor pedido é $\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$\gamma'(t) = \left(\cos t, -\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

(d) $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$

Como a imagem de γ está contida no gráfico de f,

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = \frac{2\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}^2 t + \overset{2}{\cancel{4}}\cos^2 t}{\cancel{2}} = 1 + \cos^2 t$$

Logo $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 1 + \cos^2 t)$

$\therefore \quad \Gamma'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, -2\cos t \operatorname{sen} t)$

O vetor tangente a Γ em $\Gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é então

$$\Gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\cancel{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$

$\therefore \boxed{\Gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$