3. **(2,0)** Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla F(1,1,1) \neq \vec{0}$. Seja S a superfície de nível de F dada por $F(x,y,z) = 1$ e suponha que as curvas

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

definidas por

$$\gamma(t) = (t, t^4 + t^3 - 1, t^2) \quad \text{e} \quad \mu(t) = (t^2 + 1, t^3 + 2t^2 + 3t + 1, t + 1)$$

estejam contidas em S (ou seja, $\text{Im}(\gamma) \subset S$ e $\text{Im}(\mu) \subset S$). Determine a equação do plano tangente a S no ponto $(1,1,1)$.

$\gamma(1) = \mu(0) = (1,1,1)$

Como $\text{Im}(\gamma) \subset S$, $\gamma'(1)$ é um vetor diretor do plano tangente à superfície S no ponto $(1,1,1)$.

Analogamente, $\mu'(0)$ é um vetor diretor do plano tangente à superfície S no ponto $(1,1,1)$

$\gamma'(t) = (1, 4t^3 + 3t^2, 2t) \Rightarrow \gamma'(1) = (1,7,2)$

$\mu'(t) = (2t, 3t^2 + 4t + 3, 1) \Rightarrow \mu'(0) = (0,3,1)$

Plano tangente a S em $(1,1,1)$ é dado por:

$$(1,1,1) + \lambda(1,7,2) + \beta(0,3,1)$$

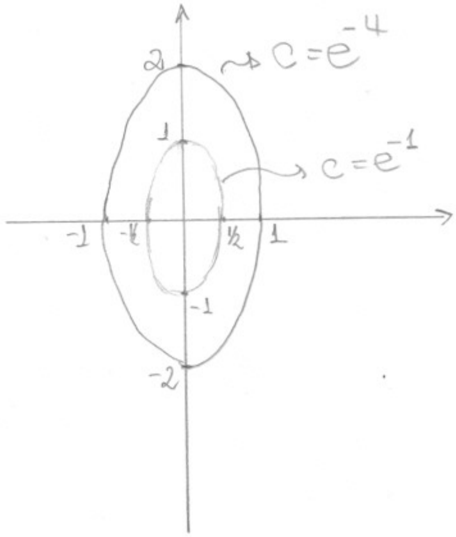
$$\lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

4. **(3,5)** Seja $f(x,y) = e^{-4x^2-y^2}$.

(a) Esboce o gráfico de f. Para isso, desenhe as curvas de nível nos níveis $k = e^{-1}$ e $k = e^{-4}$ e desenhe as intersecções do gráfico de f com os planos $x = 0$ e $y = 0$.

(b) Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma face esteja contida no plano $z = 0$ e no disco $4x^2 + y^2 \leq 2$ e a correspondente face oposta tenha seus vértices no gráfico de f.

JUSTIFIQUE ! Explicite claramente qual a função com a qual está trabalhando e qual o domínio considerado.



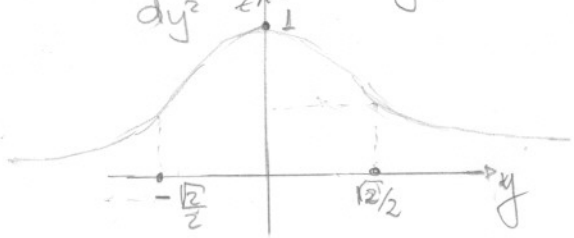
a) $f(x,y) = e^{-1} \iff 4x^2+y^2 = 1$ elipse

$f(x,y) = e^{-4} \iff 4x^2+y^2 = 4$ elipse

$\text{Graf}(f) \cap$ plano $x=0$: $z = e^{-y^2}$

$\frac{dz}{dy} = -2y e^{-y^2}$ (máx $y=0$)

$\frac{d^2z}{dy^2} = (-2+4y^2)e^{-y^2}$ (inflexão: $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$)



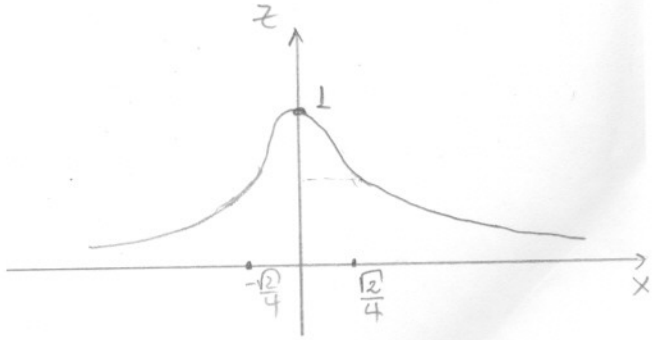
$\lim_{y \to \pm\infty} e^{-y^2} = 0$

$\text{Graf}(f) \cap$ plano $y=0$: $z = e^{-4x^2}$

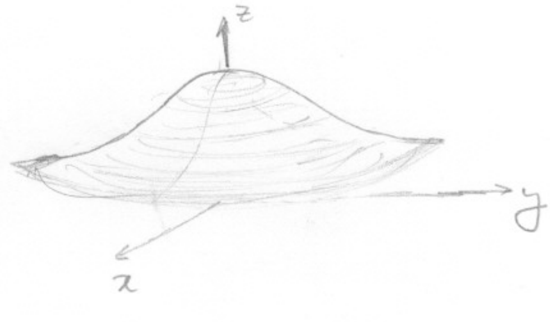
$\frac{dz}{dx} = -8x e^{-4x^2}$ (máx $x=0$)

$\frac{d^2z}{dx^2} = (-8+64x^2)e^{-4x^2}$

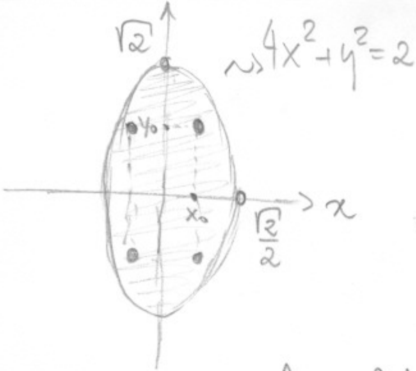
(inflexão: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$)



Graf(f)



b)



Dado, no primeiro quadrante, um dos vértices da base do paralelepípedo, (x_0, y_0), os outros vértices estão determinados pelas condições de simetria e paralelismo das faces com os planos coordenados: $(-x_0, -y_0)$ e $\pm(-x_0, y_0)$.

A altura do paralelepípedo será $z_0 = e^{-4x_0^2 - y_0^2}$ e seu volume, $V = 4x_0 y_0 e^{-4x_0^2 - y_0^2}$

① O problema pode ser traduzido por: encontrar (x_0, y_0) no conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 4x^2+y^2 \leq 2\}$ que maximiza a função $V(x,y) = 4xy\, e^{-4x^2-y^2}$.
Como E é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$ e como V é contínua, o teorema de Weierstrass nos garante que o problema tem solução.
Os candidatos a ponto de máximo são os pontos críticos do interior de E e os pontos da fronteira de E.

I <u>Pontos críticos</u>

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 4y - 32x^2y = 4y(1-8x^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 4x - 8xy^2 = 4x(1-2y^2)$$

$$\begin{cases} 4y(1-8x^2)=0 \\ 4x(1-2y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 \text{ ou } \begin{cases} 1-8x^2=0 \\ 1-2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x,y)=(0,0) \\ \pm(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2) = (x,y) \\ \pm(-\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2) = (x,y) \end{array}$$

Os 4 últimos pontos são os vértices do paralelepípedo de volume $V(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2) = 4\,\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4\cdot 2}\, e^{-1} = \boxed{e^{-1}}$

II <u>Fronteira de E</u> (elipse $4x^2+y^2=2$)

A elipse $4x^2+y^2=2$ ou $(\sqrt{2}x)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ pode ser parametrizada por

$$\sqrt{2}\,x = \cos t \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$$

$$y/\sqrt{2} = \operatorname{sen} t \Rightarrow y = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Substituindo, temos:

$$V(x,y) = V\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\cos t \operatorname{sen} t \cdot e^{-2}$$

$$= 2\cdot \operatorname{sen} 2t \cdot e^{-2}$$

Para $t \in [0, 2\pi]$, $2e^{-2}\operatorname{sen} 2t$ é máximo quando $\operatorname{sen} 2t = 1$ e seu valor é $2e^{-2}$. Como $2e^{-2} < e^{-1}$, o valor máximo é aquele encontrado no item anterior.

<u>RESPOSTA</u>: As dimensões do paralelepípedo são: base $\sqrt{2}/2$ por $\sqrt{2}$ e altura e^{-1}.