2. **(2,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e suponha que $-4x + 3y + 3z = 3$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(t, u) = tf(t^3 - 4tu - t, t^2 - 2u^2 + 1).$$

(a) Determine $f(0, 2)$, $\nabla f(0, 2)$ e $\nabla g(3, 2)$.

(b) Determine o vetor $\vec{w}$ para o qual a derivada direcional $\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}(3, 2)$ tem valor mínimo. Qual é este valor?

(a) A equação do plano tangente ao gráfico de f em $(0, 2, f(0,2))$ é $-4x + 3y + 3z = 3$. Quando $x = 0$ e $y = 2$, temos que $z = f(0,2)$. Logo: $6 + 3f(0,2) = 3$ e $\boxed{f(0,2) = -1}$.

O vetor normal ao gráfico de f em $(0, 2, f(0,2))$ é $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,2), \frac{\partial f}{\partial y}(0,2), -1\right)$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(-4, 3, 3) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,2), \frac{\partial f}{\partial y}(0,2), -1\right)$.

Portanto $\lambda = -3$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = \frac{4}{3}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = -1$.

Logo $\boxed{\nabla f(0,2) = (4/3, -1)}$.

Agora, escreva $x = x(t,u) = t^3 - 4tu - t$ e
$y = y(t,u) = t^2 - 2u^2 + 1$.

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,u) = 3t^2 - 4u - 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial u}(t,u) = -4t$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,u) = 2t \qquad \frac{\partial y}{\partial u}(t,u) = -4u$$

Pela Regra da Cadeia temos que

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,u) = f(x,y) + t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(3t^2-4u-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(2t)\right]$$

Quando $t = 3$ e $u = 2$, temos que $x = 0$ e $y = 2$. Logo

$$\frac{\partial g}{\partial t}(3,2) = -1 + 3\left[\frac{4}{3}(18) + (-1).6\right] = \underline{\underline{53}}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(-4t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(-4u)\right].$$

Logo $\frac{\partial g}{\partial u}(3,2) = 3\left[\frac{4}{3}.(-12) - 1(-8)\right] = \underline{\underline{-24}}$

Logo $\boxed{\nabla g(3,2) = (53, -24)}$

(b) O vetor $\vec{w}$ tem que ser o oposto do versor de $\nabla g(3,2)$.

Logo $\vec{w} = \dfrac{-1}{\sqrt{(53)^2+(24)^2}}(53,-24)$

e $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{w}}(3,2) = -\sqrt{(53)^2+(24)^2}$