2. **(2,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e suponha que $3x - 4y + 3z = 3$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 0, f(2, 0))$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(t, u) = tf(t^2 - 2u^2 + 1, t^3 - 4tu - t).$$

(a) Determine $f(2, 0)$, $\nabla f(2, 0)$ e $\nabla g(3, 2)$.

(b) Determine o vetor $\vec{w}$ para o qual a derivada direcional $\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}(3, 2)$ tem valor mínimo. Qual é este valor?

(a) A equação do plano tangente ao gráfico de f em $(2, 0, f(2,0))$ é $3x - 4y + 3z = 3$. Então fazendo $x = 2$, $y = 0$ e $z = \underline{f(2,0)}$ temos, $6 + 3f(2,0) = 3$. Logo $\boxed{f(2,0) = -1}$.

O vetor normal ao gráfico de f em $(2, 0, f(2,0))$ é $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,0), \frac{\partial f}{\partial y}(2,0), -1\right)$. Temos que $\vec{N} \parallel (3, -4, 3)$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(3, -4, 3) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,0), \frac{\partial f}{\partial y}(2,0), -1\right)$. Daí, temos que $\lambda = -3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = -1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = \frac{4}{3}$ e então $\boxed{\nabla f(2,0) = \left(-1, \frac{4}{3}\right)}$.

Escreva $x = x(t,u) = t^2 - 2u^2 + 1$ e $y = y(t,u) = t^3 - 4tu - t$

$\frac{\partial x}{\partial t}(t,u) = 2t$, $\frac{\partial x}{\partial u}(t,u) = -4u$

$\frac{\partial y}{\partial t}(t,u) = 3t^2 - 4u - 1$ $\frac{\partial y}{\partial u}(t,u) = -4t$

Pela Regra da Cadeia temos que:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,u) = f(x,y) + t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,(3t^2 - 4u - 1)\right]$$

Quando $t = 3$ e $u = 2$, $x = 2$, e $y = 0$.

Logo $\frac{\partial g}{\partial t}(3,2) = f(2,0) + 3\left[-1 \cdot 6 + \frac{4}{3} \cdot 18\right] = -1 + 54 = 53.$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot (-4u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,(-4t)\right]$$

Temos então: $\frac{\partial g}{\partial u}(3,2) = 3\left[-1 \cdot (-8) + \frac{4}{3}(-4 \cdot 3)\right]$

$= 3[-8] = -24$

Logo $\boxed{\nabla g(3,2) = (53, -24)}$

(b) O vetor $\vec{w}$ tem que ser o oposto do versor de $\nabla g(3,2)$.

Logo $$\vec{w} = \frac{-1}{\sqrt{(53)^2+(24)^2}}(53,-24)$$

e $$\frac{\partial g}{\partial \vec{w}}(3,2) = -\sqrt{(53)^2+(24)^2}$$