1. **(2,0)** Seja $f(x,y) = (2x^4 + y^4)^{\frac{2}{5}}$.

(a) Determine os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.

(b) É f diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$?

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{5}(2x^4+y^4)^{-3/5}\, 8x^3$ se $(x,y) \neq (0,0)$

Se $(x,y) = (0,0)$, $f(x,0) = (2x^4)^{2/5} = 2^{2/5} x^{8/5}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = g'(0)$, onde $g(x) = f(x,0)$.

Mas $g'(x) = 2^{2/5} \cdot \frac{8}{5} x^{3/5}$. Logo $g'(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{16}{5}\frac{x^3}{(2x^4+y^4)^{3/5}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (x,y), pois é uma função racional,

Verificar se $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{16}{5}\frac{x^3}{(2x^4+y^4)^{3/5}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{16}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{x^5}{2x^4+y^4}\right)^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[5]{\left(\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{x^4}{2x^4+y^4}\right)^{*}}_{\text{limitada}}\right)^3} =$$

$$= 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

(* é claro que se $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leq \frac{x^4}{2x^4+y^4} \leq 1$)

Logo $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$

Analogamente, se $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{8}{5}\frac{y^3}{(2x^4+y^4)^{3/5}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k^{8/5}}{k} = \lim_{k\to 0} k^{3/5} = 0.$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{5}\frac{y^3}{(2x^4+y^4)^{3/5}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como antes, se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em (x,y).

Em $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{5}\frac{y^3}{(2x^4+y^4)^{3/5}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{y^5}{2x^4+y^4}\right)^3}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{5}\sqrt[5]{\left(\underbrace{y}_{0}\cdot\underbrace{\left(\frac{y^4}{2x^4+y^4}\right)}_{\text{limitada}}\right)^3} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$.

(b) Como f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (por (a)), f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.