1. **(2,0)** Seja $f(x,y) = (x^4+2y^4)^{\frac{2}{5}}$.

(a) Determine os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.

(b) É f diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$?

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{5}(x^4+2y^4)^{-3/5} \cdot 4x^3 = \dfrac{8x^3}{5}(x^4+2y^4)^{-3/5}$

desde que $(x,y) \neq (0,0)$.

Se $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^4)^{2/5}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{3/5} = 0.$$

Logo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8}{5}x^3(x^4+2y^4)^{-3/5} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

É claro que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em todo $(x,y) \neq (0,0)$ (é uma função racional).

<u>Verificar se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{5}\frac{x^3}{(x^4+2y^4)^{3/5}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{5}\sqrt[5]{\frac{x^{15}}{(x^4+2y^4)^3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{x^5}{x^4+2y^4}\right)^3}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8}{5}\sqrt[5]{\left(x\cdot\frac{x^4}{x^4+2y^4}\right)^3}$$

Se $(x,y)\neq(0,0)$, temos que $0 \leq \dfrac{x^4}{x^4+2y^4} \leq 1$. Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underset{\to 0}{x}\underbrace{\left(\frac{x^4}{x^4+2y^4}\right)}_{\text{limitada}} = 0.$$

Portanto $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$

Analogamente:

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2}{5}(x^4+2y^4)^{-3/5} \cdot 8y^3 = \dfrac{16}{5}\dfrac{y^3}{(x^4+2y^4)^{3/5}}$ se $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{(2k^4)^{2/5}}{k} = \lim_{k\to 0} 2^{2/5}\frac{k^{8/5}}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} 2^{2/5} k^{3/5} = 0$$

Logo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{16}{5}\dfrac{y^3}{(x^4+2y^4)^{3/5}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em todo $(x,y)\neq(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{16}{5}\frac{y^3}{(x^4+2y^4)^{3/5}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[5]{\left(\frac{y^5}{x^4+2y^4}\right)^3}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[5]{\left(\underset{\to 0}{y}\underbrace{\left(\frac{y^4}{x^4+2y^4}\right)}_{\text{limitada}}\right)^3} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

(b) Como f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (por (a)), f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.