3. **(1,5)** Seja $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^2}{x^4-y^2}$.

(a) Encontre o domínio de f e descreva suas curvas de nível.

(b) Esboce as curvas de nível dos níveis $c=-1, c=1$ e $c=2$. O que acontece quando $c=\frac{1}{2}$?

(c) Determine a imagem de f.

(a) Domínio de f: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4 \neq y^2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \neq x^2 \text{ e } y \neq -x^2\}$

Curvas de nível:

$f(x,y)=c \iff x^4 \neq y^2$ e $x^4+y^2 = c(x^4-y^2) \iff$

$\iff x^4 \neq y^2$ e $y^2(c+1) = x^4(c-1)$

Se $(c+1)(c-1)<0$, isto é, se $-1<c<1$, não existe (x,y) com $f(x,y)=c$

Se $c=1$, a curva de nível é

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4 \neq y^2 \text{ e } y^2=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0 \text{ e } x\neq 0\}$

Se $c=-1$, a curva de nível é

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4 \neq y^2 \text{ e } x^4=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0 \text{ e } y\neq 0\}$

Se $c>1$ ou $c<-1$ então $\frac{c-1}{c+1}<0$ e temos que

$y^2(c+1) = x^4(c-1) \iff y^2 = \frac{c-1}{c+1}x^4 \iff y = \pm\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\,x^2$

Nesse caso, a curva de nível é

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4 \neq y^2,\ y=\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\,x^2 \text{ ou } y=-\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\,x^2\}$

Note que se $c>1$ ou $c<-1$ então $0<\frac{c-1}{c+1}\neq 1$

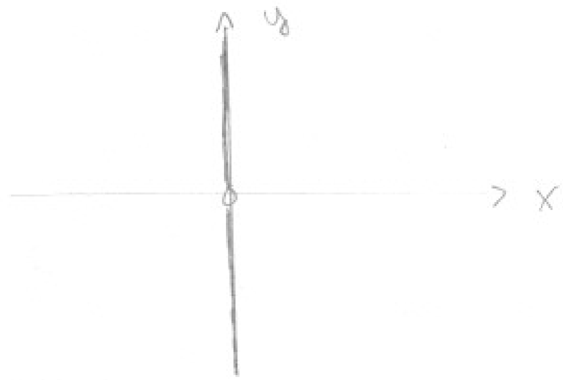
e, portanto, se $y=\pm\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\,x^2$ então

$y^2 = \frac{c-1}{c+1}x^4 \neq x^4$ se $x\neq 0$. Assim, a curva de nível é

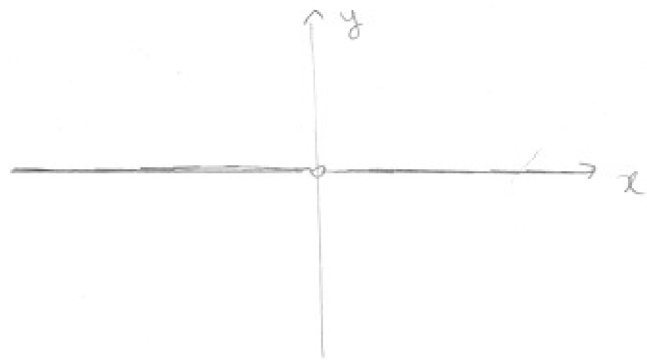
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0,\ y=\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\,x^2 \text{ ou } y=-\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\,x^2\}$

(b) Quando $c = \frac{1}{2}$, como visto em (a), não existe (x, y) com $f(x, y) = c$

Para $c = -1$

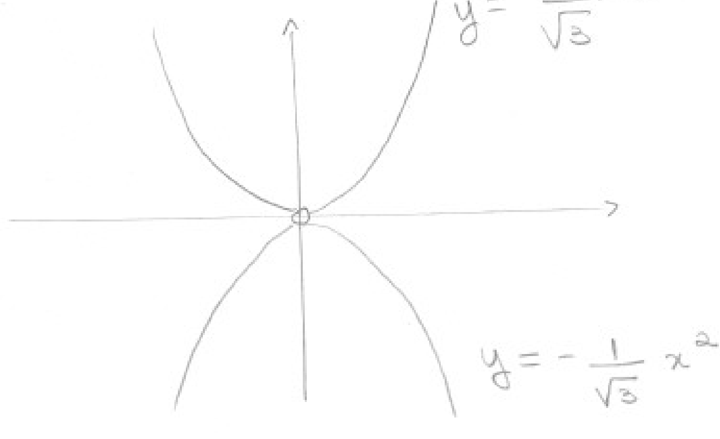


Para $c = 1$



Para $c = 2$, $\frac{c-1}{c+1} = \frac{1}{3}$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x^2$



(c) c está na imagem de $f \iff$ existe (x, y) com $f(x, y) = c$.

Assim, como visto em (a), a imagem de f é a reunião dos intervalos $]-\infty, -1]$ e $[1, \infty[$