3. **(1,5)** Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^4}{x^2-y^4}$.

(a) Encontre o domínio de f e descreva suas curvas de nível.

(b) Esboce as curvas de nível dos níveis $c=-1, c=1$ e $c=2$. O que acontece quando $c=\frac{1}{2}$?

(c) Determine a imagem de f.

(a) Domínio de f: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^4\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \neq y^2 \text{ e } x \neq -y^2\}$

Curvas de nível:

$f(x,y)=c \iff x^2\neq y^4$ e $x^2+y^4 = c(x^2-y^4) \iff$

$\iff x^2 \neq y^4$ e $x^2(c-1) = y^4(c+1)$

Se $(c-1).(c+1)<0$, isto é, se $-1<c<1$, não existe (x,y) com $f(x,y)=c$

Se $c=1$, a curva de nível é

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^4 \text{ e } y^4=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0 \text{ e } x\neq 0\}$

Se $c=-1$, a curva de nível é

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^4 \text{ e } x^2=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0 \text{ e } y\neq 0\}$

Se $c>1$ ou $c<-1$ então $\frac{c+1}{c-1} < 0$ e temos que

$x^2(c-1) = y^4(c+1) \iff x^2 = \frac{c+1}{c-1}y^4 \iff x = \pm\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\,y^2$

Nesse caso, a curva de nível é

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^4,\ x=\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\,y^2 \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\,y^2\}$

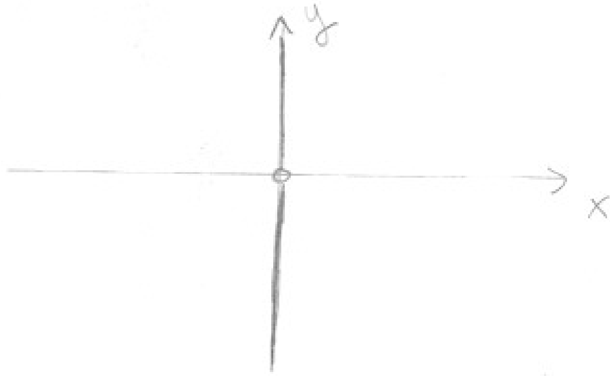
Note que, se $c>1$ ou $c<-1$ então $0<\frac{c+1}{c-1}\neq 1$

e portanto ~~x~~ $x=\pm\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\,y^2$ então

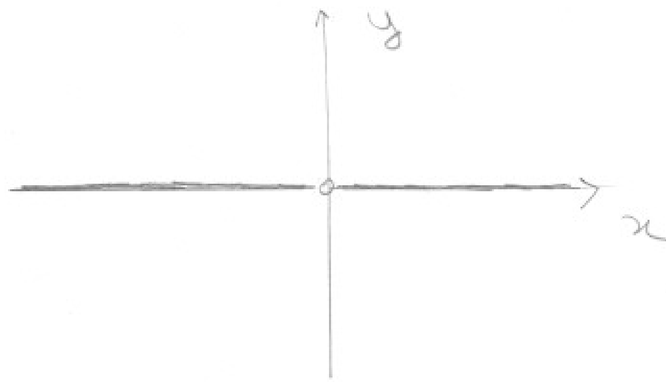
$x^2 = \frac{c+1}{c-1}y^4 \neq y^4$ se $y\neq 0$. Assim, a curva de nível é $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0,\ x=\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\,y^2 \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}\,y^2\}$

(b) Quando $c = 1/2$, como visto em (a), não existe (x,y) com $f(x,y) = c$

Para $c = -1$

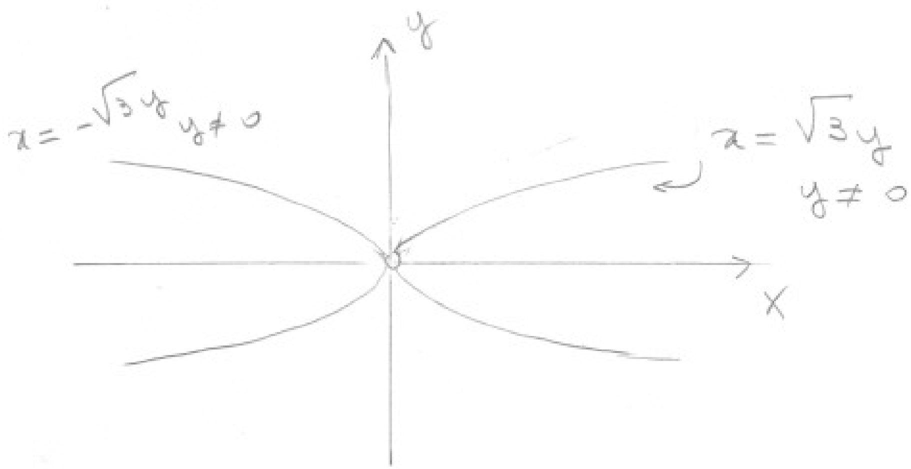


Para $c = 1$



Para $c = 2$, $\frac{c+1}{c-1} = 3$,

$x = \pm \sqrt{3}\, y^2$



(c) c está na imagem de $f \Longleftrightarrow$ existe (x,y) com $f(x,y) = c$.

Assim, como visto em (a), a imagem de f é a reunião dos intervalos $]-\infty,-1]$ e $[1,\infty[$