2. **(2,5)** Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva parametrizada definida por

B

$$\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 3t^2).$$

(a) Estude o comportamento dos vetores tangentes.

(b) Analise a concavidade.

(c) Verifique se existem pontos de auto-intersecção.

(d) Calcule os limites necessários e esboce a imagem de $\gamma$.

(a) $x(t) = 2t^3 - 6t^2 \Rightarrow x'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$
$y(t) = t^3 - 3t^2 \Rightarrow y'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

| | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $x'$ | + | − | + | + |
| $x$ | → | ← | → | → |
| $y'$ | + | − | − | + |
| $y$ | ↑ | ↓ | ↓ | ↑ |
| $\gamma'$ | ↗ | ↙ | ↘ | ↗ |

$t=1 \quad \gamma'(1) = (0,-3)$ tangente vertical

$t=2 \quad \gamma'(2) = (12,0)$ tangente horizontal

$t=0 \quad \gamma'(0) = (0,0)$

Como $\gamma'(0) = (0,0)$, vamos estudar esse caso separadamente. Se $t \neq 0, 1$, $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{3t(t-2)}{6t(t-1)}$ é o coeficiente angular da reta tangente à trajetória de $\gamma$ em $\gamma(t)$.
Calculando $\lim\limits_{t\to 0} m(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{t}(t-2)}{2\cancel{t}(t-1)} = 1$, temos que a reta tangente à trajetória de $\gamma$ em $\gamma(0) = (0,0)$ tem coeficiente angular igual a 1.

(b) A concavidade é determinada pelo sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$, $t \neq 0, 1$.
$m'(t) = \dfrac{1[(t-1)-(t-2)]}{2(t-1)^2} = \dfrac{1}{2(t-1)^2} > 0$. Logo, o sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$ é:

$+ \quad 0 \quad - \quad 1 \quad +$

$\smile \quad 0 \quad \frown \quad 1 \quad \smile$

(c) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ com $\gamma(t) = \gamma(s)$. Então:
$2t^3 - 3t^2 = 2s^3 - 3s^2 \Longrightarrow 2(t^3 - s^3) = 3(t^2 - s^2)$
$t^3 - 3t^2 = s^3 - 3s^2 \Longrightarrow t^3 - s^3 = 3(t^2 - s^2)$
$\Rightarrow 2(t^3 - s^3) = t^3 - s^3$

$\Longrightarrow t^3 - s^3 = 0 \Longrightarrow t = s$. Logo não há auto-intersecções.

(d) $\lim\limits_{t\to\pm\infty} (2t^3 - 3t^2) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} t^3 - 3t^2 = \pm\infty$.

| $t$ | $\gamma(t)$ |
|---|---|
| 0 | $(0,0)$ |
| 1 | $(-1,-2)$ tangente vertical |
| 2 | $(4,-4)$ tangente horizontal |
| 3 | $(27, 0)$ intersecção com o eixo $x$ |
| $3/2$ | $(0, -27/8) \approx (0, -3{,}3)$ intersecção com o eixo $y$ |