

2. (2,5) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva parametrizada definida por

A

$$\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, 2t^3 - 3t^2).$$

- (a) Estude o comportamento dos vetores tangentes.
 (b) Analise a concavidade.
 (c) Verifique se existem pontos de auto-intersecção.
 (d) Calcule os limites necessários e esboce a imagem de γ .

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x(t) &= t^3 - 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \\ y(t) &= 2t^3 - 3t^2 \Rightarrow y'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1) \end{aligned}$$

		0	1	2	
x'	+	-	-	+	
x	\rightarrow	\leftarrow	\leftarrow	\rightarrow	
y'	+	-	+	+	
y	\uparrow	\downarrow	\uparrow	\uparrow	
γ'	\nearrow	\swarrow	\nwarrow	\nearrow	

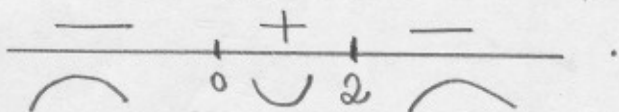
$t=1 \quad \gamma'(1) = (-3, 0)$
 tangente horizontal

$t=2 \quad \gamma'(2) = (0, 12)$
 tangente vertical

Em $t=0$, $\gamma'(0) = (0, 0)$. Se $t \neq 0, 2$, então $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ é o coeficiente angular da reta tangente à trajetória de γ em $\gamma(t)$.

No caso, $m(t) = \frac{6t(t-1)}{3t(t-2)}$, $t \neq 0, 2$. Calculando $\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t-1)}{t-2} = 1$ obtemos que quando $t=0$, a reta tangente à trajetória em $\gamma(0) = (0, 0)$ tem coeficiente angular igual a 1.

(b) A concavidade é determinada pelo sinal de $\frac{m'(t)}{x'(t)}$, $t \neq 0, 2$.
 $m'(t) = \frac{2[t-2 - (t-1)]}{(t-2)^2} = -\frac{2}{(t-2)^2} < 0$. Assim, o sinal de $\frac{m'(t)}{x'(t)}$ é



(c) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ com $\gamma(t) = \gamma(s)$. Então
 $\left. \begin{aligned} t^3 - 3t^2 &= s^3 - 3s^2 \Rightarrow t^3 - s^3 = 3(t^2 - s^2) \\ 2t^3 - 3t^2 &= 2s^3 - 3s^2 \Rightarrow 2(t^3 - s^3) = 3(t^2 - s^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t^3 - s^3 = 2(t^3 - s^3)$
 $\Rightarrow t^3 - s^3 = 0 \Rightarrow t = s$. Logo NÃO há auto-intersecção.

(d) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^3 - 3t^2 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} 2t^3 - 3t^2 = \pm\infty$. y

t	$\gamma(t)$
0	(0, 0)
1	(-2, -1) tangente horizontal
2	(-4, 4) tangente vertical
3	(0, 27) intersecção com o eixo y
$\frac{3}{2}$	$(-\frac{27}{8}, 0) \approx$ intersecção com o eixo x
$\frac{3}{2}$	(-3, 3, 0)

