A

2. **(2,5)** Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva parametrizada definida por

$$\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, 2t^3 - 3t^2).$$

(a) Estude o comportamento dos vetores tangentes.

(b) Analise a concavidade.

(c) Verifique se existem pontos de auto-intersecção.

(d) Calcule os limites necessários e esboce a imagem de γ.

(a) $x(t) = t^3 - 3t^2 \Rightarrow x'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$
$y(t) = 2t^3 - 3t^2 \Rightarrow y'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$

		0	1	2
x'	$+$	$-$	$-$	$+$
x	$\longrightarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\longrightarrow$
y'	$+$	$-$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
γ'	$\nearrow$	$\swarrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$

$t = 1$ $\gamma'(1) = (-3, 0)$ tangente horizontal

$t = 2$ $\gamma'(2) = (0, 12)$ tangente vertical

Em $t = 0$, $\gamma'(0) = (0,0)$. Se $t \neq 0, 2$, então $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ é o coeficiente angular da reta tangente à trajetória de γ em $\gamma(t)$. No caso, $m(t) = \dfrac{6t(t-1)}{3t(t-2)}$, $t \neq 0, 2$. Calculando $\lim\limits_{t \to 0} m(t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2(t-1)}{t-2} = 1$ obtemos que quando $t = 0$, a reta tangente à trajetória em $\gamma(0) = (0,0)$ tem coeficiente angular igual a 1.

(b) A concavidade é determinada pelo sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$, $t \neq 0, 2$.
$m'(t) = \dfrac{2[t-2-(t-1)]}{(t-2)^2} = \dfrac{-2}{(t-2)^2} < 0$. Assim, o sinal de $\dfrac{m'(t)}{x'(t)}$ é

$-$ 0 $+$ 2 $-$

(c) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ com $\gamma(t) = \gamma(s)$. Então

$t^3 - 3t^2 = s^3 - 3s^2 \Rightarrow t^3 - s^3 = 3(t^2 - s^2)$
$2t^3 - 3t^2 = 2s^3 - 3s^2 \Rightarrow 2(t^3 - s^3) = 3(t^2 - s^2)$
$\Bigg\} \Rightarrow t^3 - s^3 = 2(t^3 - s^3)$
$\Rightarrow t^3 - s^3 = 0 \Rightarrow t = s$. Logo NÃO há auto-intersecção.

(d) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} t^3 - 3t^2 = \lim\limits_{t \to \pm\infty} 2t^3 - 3t^2 = \pm\infty$.

t	$\gamma(t)$
0	$(0,0)$
1	$(-2,-1)$ tangente horizontal
2	$(-4,4)$ tangente vertical
3	$(0,27)$ intersecção com o eixo y
$\frac{3}{2}$	$(-27/8, 0) \approx$ intersecção com o eixo x $(-3{,}3, 0)$