MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II - POLI

$1^{\underline{a}}$ prova - 15/09/2008

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Nome: ______________________ Turma: ___

Nº USP: ______________

Justifique todas as suas afirmações.

1. **(2,5)** Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$.
   (b) Usando (a), encontre um valor aproximado para $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^{\frac{13}{4}}} dx$ e mostre que o erro cometido é menor do que 10^{-4}.

(a) $f(x) = (1+x)^{-1}$; $f'(x) = -1(1+x)^{-2}$; $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$; $f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$.

$\Rightarrow f(0) = 1$; $f'(0) = -1$; $f''(0) = 2$; $f'''(x) = -6$.

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$ é

$$\boxed{P(x) = 1 - x + x^2 - x^3}$$

(b) $$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{13/4}} dx \approx \int_0^{1/2} P(x^{\frac{13}{4}}) dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[1 - x^{13/4} + x^{\frac{13}{2}} - x^{\frac{39}{4}} \right] dx =$$

$$= \left(x - \frac{4}{17} x^{\frac{17}{4}} + \frac{2}{15} x^{15/2} - \frac{4}{43} x^{43/4} \right) \Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{17}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17}{4}} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}} - \frac{4}{43}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{43}{4}}.$$

(continua no verso)

B1 e B2 $\swarrow$

<u>Estimativa do erro</u>: Usando a fórmula de Taylor,

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^{13/4}}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} P\left(x^{\frac{13}{4}}\right)dx\right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left| f\left(x^{\frac{13}{4}}\right) - P\left(x^{\frac{13}{4}}\right)\right| dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left|f^{(4)}(\bar{x})\right| \cdot \frac{\left(x^{\frac{13}{4}} - 0\right)^4}{4!}\,dx$$, para algum $\bar{x}$ entre 0 e $\left(\frac{1}{2}\right)^{13/4}$.

Como $\bar{x} > 0$ e $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5}$, temos $|f^{(4)}(\bar{x})| < 24$.

Assim, a última integral acima é menor do que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cancel{24} \cdot \frac{x^{13}}{\cancel{24}}\,dx = \frac{x^{14}}{14}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2^{14}} < \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1000} = 10^{-4}.$$