

MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II - POLI

1ª prova - 15/09/2008

Nome: _____ Turma: ____

Nº USP: _____

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Justifique todas as suas afirmações.

1. (2,5) Seja $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

(a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$.

(b) Usando (a), encontre um valor aproximado para $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^{\frac{11}{4}}} dx$ e mostre que o erro cometido é menor do que 10^{-4} .

$$(a) f(x) = (1+x)^{-1}; f'(x) = -1(1+x)^{-2}; f''(x) = 2(1+x)^{-3}; f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$$

$$\Rightarrow f(0) = 1; f'(0) = -1; f''(0) = 2; f'''(0) = -6.$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 de f em torno de $x_0 = 0$ é

$$P(x) = 1 - x + x^2 - x^3$$

$$(b) \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{1/4}} dx \approx \int_0^{1/2} P(x^{1/4}) dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[1 - x^{1/4} + x^{11/2} - x^{33/4} \right] dx =$$

$$= \left[x - \frac{4}{15} x^{5/4} + \frac{2}{13} x^{13/2} - \frac{4}{37} x^{37/4} \right] \Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{15} \frac{1}{2^{5/4}} + \frac{2}{13} \frac{1}{2^{13/2}} - \frac{4}{37} \frac{1}{2^{37/4}}.$$

Estimativa do erro: Usando a fórmula de Taylor,

$$\left| \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{1/4}} dx - \int_0^{1/2} P(x^{1/4}) dx \right| \leq \int_0^{1/2} |f(x^{1/4}) - P(x^{1/4})| dx$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{|f^{(4)}(\bar{x})|}{4!} (x^{1/4} - 0)^4 dx, \text{ para algum } \bar{x} \text{ entre } 0 \text{ e } \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}.$$

Como $\bar{x} > 0$ e $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$, temos $|f^{(4)}(\bar{x})| < 24$.

Assim,

a última integral é menor do que

$$\int_0^{1/2} 24 \cdot \frac{x^{11}}{24} dx = \frac{x^{12}}{12} \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2^{12}} < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1000} = 10^{-4}.$$