

MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II  
3ª lista de exercícios - 2008

1. Descreva as superfícies de nível de:

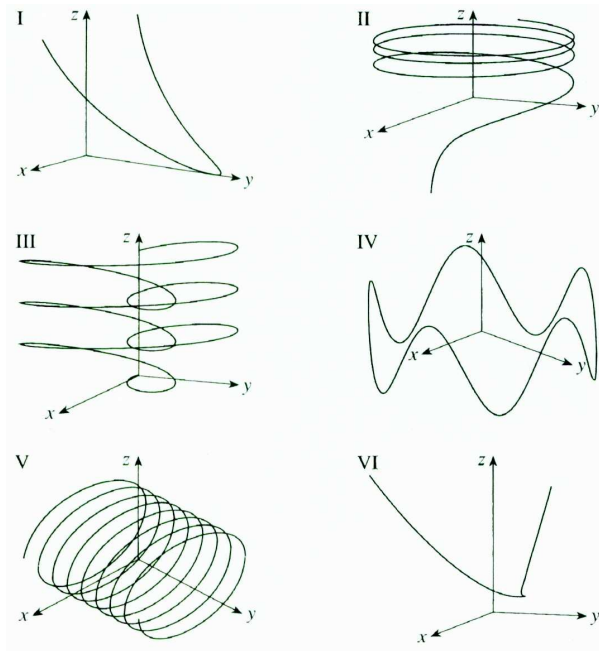
(a)  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$       (b)  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$   
 (c)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$       (d)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

2. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a)  $\gamma(t) = (1, t, 1)$       (b)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$   
 (c)  $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}), t \geq 0$       (d)  $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \geq 0$   
 (e)  $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2} \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$       (f)  $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$

3. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a)  $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \sin 4t)$       (b)  $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$   
 (c)  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$       (d)  $\gamma(t) = (\sin 3t \cos t, \sin 3t \sin t, t)$   
 (e)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \ln t)$       (f)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin 5t)$



4. O elipsóide  $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$  e o plano  $y = 2$  têm como interseção uma elipse. Ache a equação da reta tangente a essa elipse no ponto  $(1, 2, 2)$ .

5. Seja  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$  e seja  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{t^2 + 4}), t \geq 0$ .

- (a) Mostre que a imagem de  $\gamma$  está contida no gráfico de  $f$ .  
 (b) Faça um esboço da imagem de  $\gamma$ .

6. Encontre uma parametrização para a curva dada pela interseção do plano  $x = z$  com o parabolóide  $x^2 + y^2 = z$ .

7. Encontre uma parametrização para a curva obtida pela interseção do parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

8. Encontre uma parametrização para a curva obtida pela interseção da superfície  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$  com o plano  $y = 2z + 1$ .
9. Seja  $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1} \cos t, \sqrt{t^2 + 1} \sin t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Verifique que a imagem de  $\gamma$  está contida na superfície  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Esboce a imagem de  $\gamma$ .
10. Ache os pontos do hiperbolóide  $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$  onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos  $(3, -1, 0)$  e  $(5, 3, 6)$ .
11. a) Mostre que toda reta normal a uma esfera passa pelo seu centro.  
 b) Mostre que o plano tangente à superfície  $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  tem como equação  $ax_0x + by_0y + cz_0z = d$ .  
 c) Mostre que todos os planos tangentes ao cone  $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$  passam pela origem.
12. Seja  $a > 0$  e considere o plano tangente à superfície  $xyz = a$  num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.
13. Determine um plano tangente à superfície  $xyz = a$ ,  $a \neq 0$  e que seja paralelo ao plano  $x + y + z + 100 = 0$
14. Mostre que o elipsóide  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$  e a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$  se tangenciam no ponto  $(1, 1, 2)$  (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).
15. Verifique que as superfícies  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.
16. Ache um vetor tangente à interseção das superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$  no ponto  $(-1, 1, 2)$ .
17. Ache a reta tangente à interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 2$  com gráfico de  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$  no ponto  $(1, 1, 4)$ .
18. Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , diferenciáveis com  $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$  e  $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Suponha que a imagem de  $\gamma$  esteja contida na interseção do gráfico de  $f$  com a superfície  $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$ . Sabendo que  $(1, 0, -1) \in \text{Im}\gamma$ , determine uma equação para a reta tangente a  $\gamma$  neste ponto.
19. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície  $(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4} - (z - 1)^2 = 0$  nos pontos  $(2, 2, 2)$  e  $(2, 2, 0)$ .
20. Ache a derivada direcional máxima de  $f$  no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.  
 a)  $f(x, y) = xe^z + \sin(y)$ ,  $(2, 0, 0)$       b)  $f(x, y, z) = -\frac{4}{y} + z \ln(x)$ ,  $(1, 2, -1)$
21. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico  $V$  é dado por  $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ .  
 (a) Ache a taxa de variação do potencial em  $P(3, 4, 5)$  na direção do vetor  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .  
 (b) Em que direção  $V$  muda mais rapidamente em  $P$ ?  
 (c) Qual é a maior taxa de variação em  $P$ ?

22. Seja  $f(x, y) = \ln(x + y)$ .

a) Determine o polinômio de Taylor de ordem um de  $f$  em torno de  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

b) Mostre que para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  com  $x + y > 1$ , tem-se

$$|\ln(x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$$

23. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto dado:

a)  $f(x, y) = e^{x+5y}$ ,  $P = (0, 0)$

b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ ,  $P = (1, 1)$

c)  $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$ ,  $P = (0, 0)$

24. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

a)  $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$     b)  $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$

c)  $z = x^2y^2$     d)  $z = x^3y^3$

e)  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$     f)  $z = y \cos x$

g)  $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$     h)  $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$

i)  $z = xye^{-x^2-y^2}$     j)  $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$

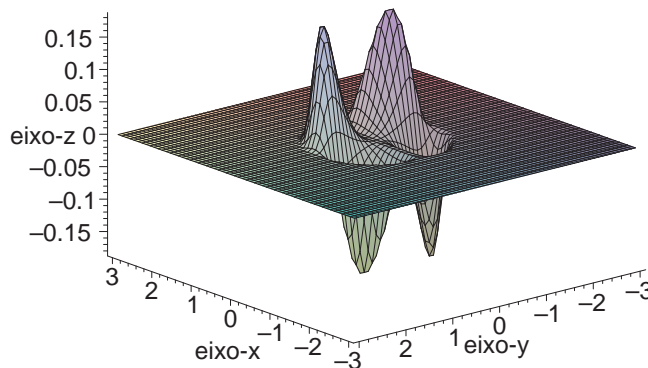
k)  $z = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$

25. A figura abaixo exibe o gráfico de  $f(x, y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)^4}$ .

a) Mostre que há um número infinito de pontos críticos.

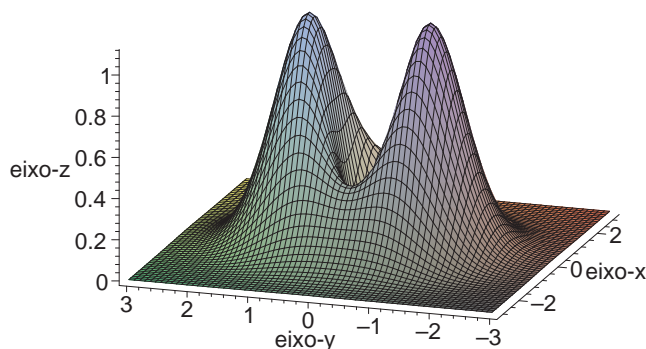
b) Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.

c) Classifique os demais pontos críticos.



26. Seja  $f$  uma função de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Supondo que  $(0,0)$  é ponto crítico de  $f$  e que, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \geq 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \geq 0$ , prove que  $(0,0)$  é ponto de mínimo global de  $f$ .

27. A figura abaixo exibe o gráfico de  $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ . Mostre que há 5 pontos críticos e ache os extremos de  $f$ .



28. Determine os valores de  $a$  para os quais a função

$$f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;

b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.

Existe  $a \in \mathbb{R}$  para o qual a função tenha ao menos um máximo local?

Existe  $a \in \mathbb{R}$  para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

29. É impossível para uma função contínua de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Verifique que  $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$  tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

30. Existe uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , polinomial, que só tenha um ponto crítico e este ponto seja mínimo local sem ser mínimo global? Analise a função  $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ . Você é capaz de esboçar o gráfico?

31. Determine o máximo e o mínimo valores da função  $f$  sujeita às restrições explicitadas:

a)  $f(x, y) = xy$ ;  $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

b)  $f(x, y, z) = xyz$ ;  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

c)  $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

32. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região  $D$  indicada. (Esboce  $D$ .)

a)  $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$ ;  $D$  é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são os pontos  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  e  $(4, 5)$

b)  $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ ;  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$

c)  $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ ;  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

d)  $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$ ;  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

33. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de  $f(x, y)$  em  $D$  sendo:

a)  $f(x, y) = xy$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$

b)  $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, 1/4], y \geq 0\}$

Você pode usar multiplicadores de Lagrange para resolver esse exercício?

34. Qual o ponto do plano  $x + 2y - z + 4 = 0$  que está mais próximo do ponto  $(1, 1, 1)$ ?

35. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.
36. Determine a distância entre as retas de equação  
 $X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5), \alpha \in \mathbb{R}$  e  $X = (-1, 0, 3) + \mu(-2, 3, 1), \mu \in \mathbb{R}$
37. Qual é o ponto da superfície  $z^2 = xy + 1$  que está mais próximo da origem?
38. Sendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ .
39. Seja  $T(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2}$  uma função que dá a temperatura do ponto  $(x, y)$  do plano. Em que ponto da região  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x + 1\}$  a temperatura máxima é atingida? E a mínima?
40. Seja  $b \in \mathbb{R}^*$  e  $f(x, y) = \frac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$ .  
 a) Determine, em função de  $b$ , o número de pontos críticos de  $f$  e classifique-os.  
 b) Faça  $b = 3$  e ache os extremos de  $f$  no triângulo (fronteira e interior) de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 3)$  e  $(-3, 3)$ .
41. Seja  $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$ , onde  $k$  é uma constante.  
 (a) Verifique que, para todo  $k \in \mathbb{R}$ , o par  $(0, 0)$  é um ponto crítico de  $f$ .  
 (b) Para cada valor de  $k$ , classifique o ponto crítico  $(0, 0)$  com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de  $k$  para os quais podemos afirmar que  $(0, 0)$  é extremo global (absoluto) de  $f$ ?
42. A temperatura num ponto  $(x, y, z)$  do espaço é dada por  $T(x, y, z) = xy + yz$ . Determine os pontos da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.
43. Considere o seguinte problema: "Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano  $z = 0$  e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$ ".  
 a) Mostre que o problema tem solução.  
 b) Resolva o problema.

Resolva os exercícios a seguir assumindo que cada problema proposto tem solução. É possível provar que essas soluções existem. Tente fazê-lo.

44. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine aquele que tem área máxima.
45. Determine a equação do plano que passa por  $(2, 2, 1)$  e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.
46. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície  $xy^2z^2 = 1$  encontre aqueles mais distantes da origem.
47. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com  $27\text{cm}^2$  de papelão.

48. Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobre, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimizam a perda de calor e, portanto, minimizam o custo do aquecimento.

### RESPOSTAS

1. a) família de planos paralelos; b) família de elipsóides com centro em  $(0, 0, 0)$ ; c) família de hiperbolóides de uma ou duas folhas; d) família de cilindros hiperbólicos.
4.  $X = (1, 2, 2) + \lambda(1, 0, -2), \lambda \in \mathbb{R}$
6.  $\gamma(t) = (\frac{1}{2}(1 + \cos t), \frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \frac{1}{2}(1 + \cos t)), t \in [0, 2\pi]$
7.  $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\cos 2t), t \in [0, 2\pi]$
8.  $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \operatorname{sen} t - 1, \operatorname{sen} t - 1), t \in [0, 2\pi]$
10.  $\pm \left( \sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$ .
13.  $x + y + z - 3\sqrt[3]{a} = 0$ .
16.  $(5, 8, 6)$ .
17.  $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$ .
18.  $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$ .
19.  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$
20. a)  $\sqrt{6}; (1, 1, 2)$  b)  $\sqrt{2}; (-1, 1, 0)$ .
21. a)  $\frac{32}{\sqrt{3}}$  b)  $(38, 6, 12)$  c)  $2\sqrt{406}$ .
22. a)  $x + y - 1$
23. a)  $1 + x + 5y$  b)  $5 + (x - 1) + 7(y - 1)$  c)  $3x + 4y$
24. a)  $(-3, 2)$  mínimo; b)  $(2/3, 1), (-4/3, -1)$  selas; c)  $(0, \lambda)$  e  $(\lambda, 0)$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$  mínimos; d)  $(0, \lambda)$  e  $(\lambda, 0)$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$  selas; e)  $(4, 4)$  máximo; f)  $(\pi/2 + k\pi, 0)$  com  $k \in \mathbb{Z}$  selas; g)  $(1, 1)$  máximo,  $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$  selas; h)  $(0, 0)$  máximo,  $(0, 2)$  mínimo,  $(0, -2), (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1)$  selas; i)  $(0, 0)$  sela,  $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  máximos,  $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  mínimos; j)  $(1/3, 0)$  mínimo; k)  $(2, 1)$  e  $(0, 3)$  sela;  $(2, 3)$  mínimo e  $(0, 1)$  máximo.
25. a)  $(a, 0)$  é ponto crítico  $\forall a \in \mathbb{R}$ . b)  $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8}), \pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$ .
27. mínimo  $f(0, 0) = 0$ ; máximo  $f(0, \pm 1) = 3e^{-1}$
28. a)  $a > 0$  b)  $a < 0$  c) não d)  $a = 0$ .
31. a) máximo:  $f(2, 2) = f(-2, -2) = 4$ ; mínimo:  $f(4, -4) = f(-4, 4) = -16$ ; b) máximo:  $2/\sqrt{3}$ , mínimo:  $-2/\sqrt{3}$ ; c) máximo:  $1/27$ , mínimo:  $0$ ; d) máximo:  $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$ , mínimo:  $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$ ; e) máximo:  $\sqrt{3}$ , mínimo:  $1$ ; f) máximo:  $3/2$ , mínimo:  $1/2$ .

32. a) máximo:  $f(4,5) = 13$ , mínimo:  $f(4,0) = -7$ ;  
 b) máximo:  $f(0,0) = 0$ , mínimo:  $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2e}$ ;  
 c) máximo:  $f(1,0) = 2$ , mínimo:  $f(-1,0) = -2$ ;  
 d) máximo:  $f(2,0) = 4$ , mínimo:  $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, -\frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .
33. a) mínimo:  $-2\sqrt{3}$  e máximo  $2\sqrt{3}$ ; b) mínimo:  $\frac{1}{32} + (\frac{15}{16})^2$  e máximo 1.
34.  $(0, -1, 2)$ .
35.  $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{100}{3}$ .
36.  $\sqrt{12}$ .
37.  $(0, 0, 1)$  ou  $(0, 0, -1)$ .
38.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
39. ponto de máximo  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; não há ponto de mínimo.
40. a) Se  $b > 0$ , temos 5 pontos críticos:  $(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1)$  e  $(0, -2)$  pontos de sela;  $(0, -2)$  máximo local e  $(0, 2)$  mínimo local; e se  $b < 0$ , temos 3 pontos críticos:  $(0, 0)$  e  $(0, 2)$  pontos de sela;  $(0, -2)$  mínimo local.  
 b) Pontos de máximo  $(-3, 3)$  e  $(3, 3)$ ; ponto de mínimo  $(0, 2)$ .
41. b)  $k > 1$ : mínimo local;  $-1 < k < 1$ : sela;  $k < -1$ : máximo local;  $k \geq 1$ :  $(0, 0)$  é ponto de mínimo global;  $k \leq -1$ :  $(0, 0)$  é ponto de máximo global.
42. Mais quentes:  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$ ; Mais frios:  $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$ .
44.  $12(2 - \sqrt{3})$ ,  $2(3 - \sqrt{3})$ ,  $4(2\sqrt{3} - 3)$
45.  $x + y + 2z - 6 = 0$
46.  $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$ ;  $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$ ;  
 $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$ ;  $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$ .
47. base  $3 \times 3$ cm, altura 1,5cm.
48. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.