MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2008

$2^{\underline{a}}$ lista de exercícios

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:
   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{z-t}$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:
   (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

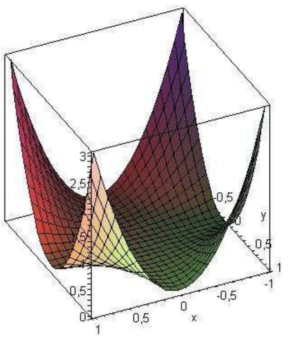
3. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

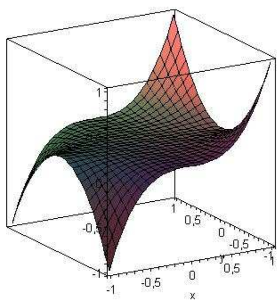
   [**Sugestão:** Dá menos trabalho usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar as regras de derivação.]

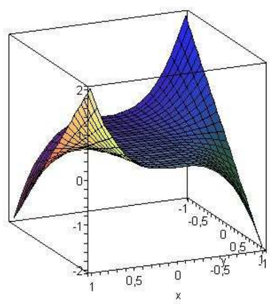
4. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

5. Verifique que a função $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é solução da equação de Laplace tridimensional
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

6. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua escolha.


(a)


(b)


(c)

7. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2^a ordem.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

   (b) f é contínua em (0,0)?

   (c) f é diferenciável em (0,0)?

9. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) É f diferenciável em $(0,0)$?

   (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

10. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

   (b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\text{sen}\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

   (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

   (d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

12. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

    (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

13. Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável.

14. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

15. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

16. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

    (a) $w = x^2+y^2; x = t^2+u^2, y = 2tu$.

    (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\text{sen}u$.

    (c) $w = x^2+y^2+z; x = tu, y = t+u, z = t^2+u^2$.

17. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

18. Um carro A está viajando para o norte a 90km/h e um carro B está viajando para o oeste a 80km/h. O carro A está se aproximando e o carro B está se distanciando da intersecção das duas estradas. Em um certo instante, o carro A está a 0,3km da intersecção e o carro B a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?

19. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3-4t, t^4-3t).$$

    Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x+3$.

20. Seja $f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e sejam a, b, c, d constantes tais que $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ e $ac+bd=0$. Seja $g(u,v)=f(au+bv,cu+dv)$. Mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv,cu+dv)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv,cu+dv).$$

21. (a) Seja $v(r,s)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $u(x,t)=v(x+ct,x-ct)$, onde c é constante. Verifique que:

$$u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t)=w(x+ct,x-ct),$$

onde $w(r,s)=-4c^2v_{rs}(r,s)$.

*(b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução da equação $u_{tt}=c^2u_{xx}$ então existem funções F e G de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct).$$

[***Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também o Exercício 7 (a).]

22. Seja $u=u(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\mathrm{sen}\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=\Delta u(r\cos\theta,r\mathrm{sen}\theta),$$

onde, por definição, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$.

23. Seja $f=f(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s,t)=f(e^s\cos t,e^s\mathrm{sen}t)$, mostre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right].$$

24. Uma função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz

$$f(tx,ty)=t^\lambda f(x,y) \text{ para todo } t>0 \text{ e } (x,y)\in\mathcal{D}_f \qquad (H)$$

onde λ é um número real fixado. Suponha que f é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ que é homogênea de grau λ. Prove que:

(a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y)$;

(b) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \lambda(\lambda-1)f(x,y)$;

(c) As funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

(d) Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

(i) $f(x,y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ (ii) $f(x,y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2}$

(iii) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}$.

[**Sugestões:**

(a) Derive (H) em relação a t e faça $t = 1$.

(b) Derive (H) duas vezes em relação a t e faça $t = 1$.

(c) Derive (H) em relação a x e em relação a y.]

25. Seja $F(r,s) = G(e^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

(b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

26. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = e^{x^2+y^2}$ no ponto $(0,0,1)$,

(b) $z = \ln(2x+y)$ no ponto $(-1,3,0)$,

(c) $z = x^2 - y^2$ no ponto $(-3,-2,5)$,

(d) $z = e^x \ln y$ no ponto $(3,1,0)$.

27. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

28. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

29. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

30. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível $f(x,y) = 8$ no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

31. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

32. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Para um determinado ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0, y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P:

    (a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$;

    (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$;

    (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

33. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0, 2, f(0,2)\big)$. Seja

$$g(u,v) = u\, f\big(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2 v\big).$$

    Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1, 1, g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

34. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície

$$z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$$

    passam pela origem.

35. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

36. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida no gráfico de uma função $z = f(x,y)$ diferenciável. Mostre que a reta tangente a γ em um ponto (x_0, y_0, z_0) está contida no plano tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0, z_0).

37. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida na intersecção dos gráficos de duas funções $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, ambas diferenciáveis. Determine a equação vetorial da reta tangente a γ em um de seus pontos, digamos (x_0, y_0, z_0), em termos dos valores de f, g e de suas derivadas parciais em (x_0, y_0).

38. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2+1, t^3+t^2+t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2\ \forall t \in \mathbb{R}$. Admita que existem 2 pontos $(x_0, y_0) \in \mathrm{Im}\gamma$ com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 2)$ é paralelo ao plano $x + y - z = 0$. Encontre esses 2 pontos.

39. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$, $(1, 0)$;

    (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$;

40. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AB}$ é 3 e que a derivada direcional e f em A na direção de $\overrightarrow{AC}$ é 26. Encontre a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AD}$.

41. Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0, 0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$. É f diferenciável em $(0, 0)$?

42. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$.

43. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

    (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0, 0)$.

    (b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

    (c) Seja $\vec{u} = (m, n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.

    (d) É f diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

RESPOSTAS

1. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{z-t}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t) = \dfrac{1}{t-z}$;
   $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t) = \dfrac{y-x}{(z-t)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{(z-t)^2}$.

2. (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y}f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

   (b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by)$.

3. -2

8. (b) Não é contínua em (0,0). (c) Não é diferenciável em (0,0).

9. (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   (c) Não é diferenciável em $(0,0)$.

   (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

10. (b) Não

11. (b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\,\mathrm{sen}((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (c)Sim. (d)Sim.

13. f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.

17. -9600π cm^3/s

18. Estão se distanciando a uma taxa de 10km/h.

19. $a = 3$

24. (d) (i) grau 2; (ii) grau -1; (iii) grau $-\dfrac{3}{2}$.

25. (a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2e^{2rs}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2e^{rs}s\cos s\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} + 9r^4\cos^2 s\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2e^{rs}\dfrac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s\dfrac{\partial G}{\partial y}$;

   (b) 0.

26. (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $e^3 y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

27. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um)

28. $6x - y - z + 6 = 0$

29. $k = 8$

30. $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

31. $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5,-4), \lambda \in \mathbb{R}$.

32. (c)

33. $a = -4$

35. $(1,4)$

37. $X = (x_0,y_0,z_0) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1 \right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), -1 \right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Observe que $z_0 = f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$.)

38. $(2,-1)$ e $\left(\frac{10}{9}, -\frac{7}{27} \right)$

39. (a) $\sqrt{5}$, $(1,2)$;

(b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right)$.

40. $\frac{327}{13}$.

41. f não é diferenciável em $(0,0)$.

42. $\frac{4}{5}$

43. (d) Não é.